ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

● ΛΥΣΕΙΣ 2.000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
● ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ F. G.-M.

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ **Δ. ΓΚΙΟΚΑ**
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

Π

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIE
COMPRENANT
L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES
PAR F. G. - M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 • ΑΘΗΝΑΙ
1952

Θεώρημα 132—III

679. Ἐὰν μία γωνία ΓΒΔ στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Β, κει μένην ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς σταθερᾶς γωνίας Α παραπληρωματικῆς αὐτῆς, αἱ τομαὶ τῶν πλευρῶν της μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς σταθερᾶς γωνίας ὁρίζουν μήκη ΑΓ, ΑΔ ἔχοντα ἄθροισμα σταθερὸν (Σχ. 402).

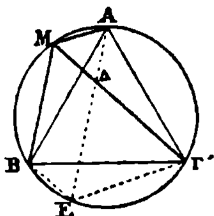
Πρόκειται περὶ ἄλλης διατυπώσεως τῆς προηγουμένης προτάσεως.

Θεώρημα 133

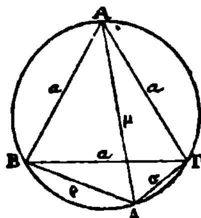
680. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον περιφερείας ἀπὸ τῆς μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν.

Πρέπει νὰ δειχθῇ: ΜΓ = ΜΑ + ΜΒ.

1η Ἀπόδειξις. Διὰ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΑΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΒ, καθὼς καὶ τὰς χορδὰς ΕΒ, ΕΓ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΜ, ΕΔΓ εἶναι ἰσόπλευρα, θὰ ἔχωμεν ΔΜ = ΑΜ, ΔΓ = ΕΓ = ΒΜ (ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΒΜΔ) καὶ ἐπομένως ΜΓ = ΜΔ + ΔΓ = ΜΑ + ΜΒ.



Σχ. 403.



Σχ. 404.

681. *2α Ἀπόδειξις.* Δυνάμεθα νὰ βασισθῶμεν ἐπὶ μιᾶς προτάσεως τοῦ ΙΙΙ Βιβλίου, τοῦ *θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου.*

Εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΔΓ (Σχ. 404), τὸ γινόμενον αμ τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν (§ 1209), ἢ

$$\alpha\mu = \alpha\rho + \alpha\sigma \qquad \text{δηλ.} \quad \mu = \rho + \sigma.$$

Θεώρημα 134

682. Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ, Ε αἱ κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΕ. Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις: ΜΒ + ΜΔ = ΜΑ + ΜΓ + ΜΕ (Ν. Α. 1876, σελ. 383).

Διὰ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΑΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΔ· λαμβάνομεν

$$\text{ΔΖ} = \text{ΑΜ} = \text{ΜΙ},$$

ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΜΙ εἶναι ἰσοσκελές. Πράγματι, τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΜΑΙ εἶναι $\frac{\overparen{\text{ΜΕΔΖ}}}{2}$ ἢ $\frac{\overparen{\text{ΑΜΕΔ}}}{2}$ δηλ. τὸ πέμπτον τῆς περιφε-

ρείας καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΙΜ ἴσον πρὸς $\frac{\widehat{B\Gamma Z} + \widehat{AM}}{2}$, πέμπτον πάλιν περιφερείας. Ἑπομένως ΙΜ = ΑΜ.

Φέροντες διὰ τῆς κορυφῆς Ε τὴν εὐθεῖαν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΒ καὶ ἀναλόγως συλλογιζόμενοι, εὑρίσκομεν ΒΘ = ΜΕ = ΜΚ καὶ ἑπομένως ΓΘ = ΑΜ = ΔΖ.

Σχ. 405.

Εἶναι λοιπὸν τὰ τετράπλευρα ΗΙΒΘ, ΗΙΜΚ, ΗΖΔΚ παραλληλόγραμμα καὶ ἡ σχέσις τῆς ἐκφωνήσεως

$$MB + M\Delta = MA + M\Gamma + ME$$

ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(HK + H\Theta) + (HI + HZ) = MA + M\Gamma + ME$$

ἡ ὁποία πάλιν, ἐπειδὴ ΗΚ = ΜΑ, ΗΙ = ΜΕ, ἀνάγεται εἰς τὴν ΗΘ + ΗΖ = ΜΓ.

Τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν τόξων ΑΕ καὶ ΘΖ ἰσοῦται πρὸς τὸ πέμπτον τῆς περιφερείας· ἄρα ΗΘ + ΗΖ = ΕΘ. Ἀφ' ἑτέρου ΕΘ = ΜΓ, ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν χορδῶν αὐτῶν ὑποτείνει ἴσα τόξα, τὰ ΕΔΓΘ καὶ ΓΒΑΜ. Ἑπομένως

$$H\Theta + HZ = M\Gamma.$$

Τὸ θεώρημα εἶναι γενικὸν καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς Τριγωνομετρίας. Ἡ γενική του διατύπωσις εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

682 α. Θεώρημα. Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον περιττοῦ πλήθους πλευρῶν· τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀρτίας τάξεως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν κορυφῶν περιττῆς τάξεως.

Σχ. 406.

Ἰδοὺ ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις διὰ τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον:

Φέρομεν τὴν ΑΡ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΖ καὶ τὰς ΑΣ, ΘΡ, παραλλήλους πρὸς τὴν ΜΕ. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων ΑΜ καὶ ΣΕ, ΜΘ καὶ ΕΡ, λαμβάνομεν:

$$AP = M\Gamma, \quad A\Sigma = M\Delta, \quad \Theta P = MB$$

καὶ ἡ δεικτέα σχέσις

$$MA + M\Gamma + ME + M\Theta = MB + M\Delta + MZ,$$

ἀνάγεται εἰς τὴν

$$MA + (AP = AI + IP) + (MK + KE) + M\Theta =$$
$$= (\Theta P = \Theta\Lambda + \Lambda P) + (MI + IH + H\Delta) + MZ.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΜΙ, ΜΘΛ, ΑΙΗ εὐκόλως ἀποδεικνύονται ἰσοσκελῆ· ἄρα

$$ΜΑ = ΜΙ, \quad ΜΘ = ΘΛ, \quad ΙΑ = ΙΗ.$$

Ἀφ' ἑτέρου, τὰ τετράπλευρα ΜΙΡΖ, ΜΛΡΚ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἄρα

$$ΙΡ = ΜΖ, \quad ΚΜ = ΛΡ.$$

Τὰ τραπέζια ΑΗΚΜ, ΑΣΕΜ εἶναι ἰσοσκελῆ, τὸ δὲ ΗΣΕΚ παραλληλόγραμμον· ἄρα

$$ΚΕ = ΗΣ.$$

Τὸ τρίγωνον τέλος ΗΔΣ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα

$$ΚΕ = ΗΣ = ΗΔ$$

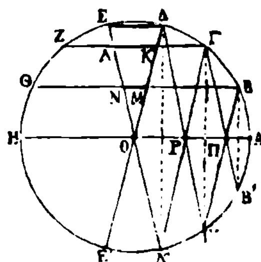
καὶ ἡ σχέσις (α) ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος ὅρου πρὸς ὅρον εἰς ἕκαστον τῶν μελῶν της.

Σημείωσις. Ἡ γενίκευσις τοῦ Θεωρήματος ὀφείλεται εἰς τὸν Chadu (N. A., 1876, σελ. 384). Διὰ τὸ κανονικὸν πολύγωνον $2ν+1$ πλευρῶν θὰ ἔχωμεν

$$λ_1 + λ_3 + λ_5 + \ldots . λ_{2ν+1} = λ_2 + λ_4 + \ldots . λ_{2ν}.$$

Θεώρημα 135

683. Διαιροῦμεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, διαμέτρου ΑΗ, εἰς περιττοῦ πλήθους ἴσα τόξα λ. χ. εἰς ἑπτὰ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Θ, Η. Διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν διάμετρον ΑΗ καὶ συνδέομεν τὸ κέντρον Ο πρὸς τὰ μεσαῖα σημεῖα Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΔΕ, ΛΚ, ΜΝ, ἅτινα ἀποτέμνονται ἐπὶ τῶν παραλλήλων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΔ καὶ ΟΕ, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα. (Le Cointe, N. A. 1842, σελ. 508).



Σχ. 407.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΔΕ + ΚΛ + ΜΝ = R.$$

Θεωροῦμεν τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον σημεῖα Δ', Γ', Β' τῶν σημείων Δ, Γ, Β καὶ φέρομεν εὐθείας κατὰ τὸ σχῆμα. Ἔχομεν προφανῶς

$$ΔΕ = ΟΡ, \quad ΚΛ = ΡΠ, \quad ΜΝ = ΑΠ.$$

Ἐπομένως $$ΔΕ + ΚΛ + ΜΝ = R.$$

Σημείωσις. Τὸ ἔργον τοῦ Le Cointe: *Μαθήματα ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων καὶ τῆς Τριγωνομετρίας* (1858), περιέχουν μέγαν ἀριθμὸν ἀσκήσεων Τριγωνομετρίας, εἴτε ἀνεκδότων, εἴτε ἐρανισμένων ἐκ τῆς *Journal de Crelle.*

Καμπυλόγραμμα πολύγωνα

684. Τὰ ἐπίπεδα καμπυλόγραμμα πολύγωνα δηλ. τὰ πολύγωνα τὰ ἀποτελούμενα ἐκ τόξων κύκλων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, παρουσιάζουν μέγα ἐνδιαφέρον. Ἐπειδὴ ἡ σπουδὴ αὐτῶν δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς ἀνεύρεσιν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀληθεύουν καὶ διὰ πολύγωνα μὲ πλευρὰς τόξα μικρῶν κύκλων ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀκριβῶς ὅπως πολλαὶ ἰδιότητες τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἰσχύουν καὶ διὰ σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ πλευρὰς τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς σφαίρας.

Αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰ σχήματα αὐτὰ προτάσεις εἶναι ἀρκετὰ ἁπλαῖ ὥστε νὰ μὴ ἀπαιτοῦν παρὰ τὰς γνώσεις τῶν δύο πρώτων βιβλίων τῆς Γεωμετρίας· ἐν τούτοις ἡ σπουδὴ των πολὺ εὐκολύνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς *Ἀντιστροφῆς* (*Μέθοδοι*, § 217).

Εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν (5ην) παραλείπομεν τὰ σχετικὰ πρὸς καμπυλόγραμμα πολύγωνα θεωρήματα (§ 685 ἕως 697), διατηροῦντες μόνον τὸ *Θεώρημα τοῦ Miquel* ἐπὶ τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν τόξων τριῶν κύκλων διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τοῦτο ὅμως θὰ ἀναφέρωμεν εἰς τὴν φυσικήν του θέσιν, εἰς τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τῆς *Ἀντιστροφῆς* (§ 1342, μ).

Κύκλος περιγεγραμμένος εἰς πολύγωνον

698. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τέσσαρα σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ἐγγράψιμον.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ πᾶν τετράπλευρον μὲ ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἔχῃ περισσοτέρας κορυφὰς ἀπὸ τέσσαρας, τὸ δυνατὸν τῆς ἐγγραφῆς του εἰς κύκλον ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἰδίου ζητήματος διὰ τὰ τετράπλευρα εἰς ἃ δύναται νὰ διασπασθῇ.

699. ***Ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.*** *Συγκυκλικὰ ἢ ὁμοκυκλικὰ* σημεῖα ὀνομάζονται τέσσαρα ἢ περισσότερα σημεῖα ἐὰν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

Ἡ ὀνομασία αὕτη, εἰσαχθεῖσα ὑπὸ τῶν Ἄγγλων γεωμετρῶν, ἀπαντᾶται συχνὰ εἰς τὴν *Νεωτέραν γεωμετρίαν τοῦ τριγώνου*.

Θεώρημα 138—VIII

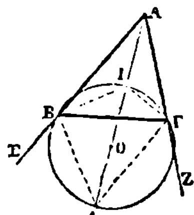
700. *Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου τέμνωνται ὀρθογωνίως, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἀφοῦ αἱ πλευραί του εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους.

Θεώρημα 138—IX

701. ***Αἱ κορυφαὶ Β, Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὴν γωνίαν Α κύκλου, εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.***

Αἱ διχοτόμοι, πράγματι, ΒΙ, ΒΔ τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΓΒΕ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, καθὼς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΙΓ καὶ ΓΔ· ἡ περιφέρεια, ἑπομένως, μὲ διάμετρον ΙΔ διέρχεται διὰ τῶν Β καὶ Γ.



Σχ. 418.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΙΒΔΓ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΟΓ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2) Τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως ΙΔ τῶν κέντρων Ι καὶ Δ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ΑΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΒΟΓ: ΙΟ ἢ ΔΟ = ΒΟ ἢ ΓΟ (§ 735 καὶ 816 Παρ/σις).

Θεώρημα 138—X

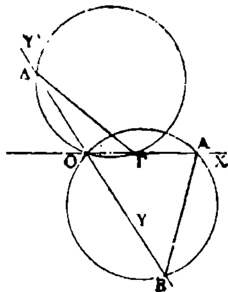
702. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Γ τοῦ τόξου ΑΒ φέρωμεν χορδὰς ΓΖΔ, ΓΘΕ, τεμνούσας τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὰ Ζ καὶ Θ, τὰ τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΓΔΕ εἶναι ἰσογώνια καὶ τὸ τετράπλευρον ΔΕΘΖ ἐγγράψιμον.

Θεώρημα 138—XI

702 α. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ κινεῖται εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ἄκρα του Α καὶ Β νὰ γράφουν δύο τεμνομένας εὐθείας ΟΧ, ΟΥ. Δείξατε, ὅτι ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιφέρεια ἔχει σταθερὰν τὴν ἀκτῖνα.

Τὸ τόξον ΑΟΒ εἶναι τόξον κυκλικοῦ τμήματος σταθερᾶς γωνίας ΧΟΥ· ἡ ἀκτίς, ἄρα, τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει εἶναι σταθερά.

Ἐὰν τὸ σταθεροῦ μήκους τμῆμα ΑΒ ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς παραπληρωματικῆς τῆς ΧΟΥ γωνίας (ΑΒ = ΓΔ), τὸ τόξον ΓΟΔ εἶναι τόξον κυκλικοῦ τμήματος γωνίας ἴσης πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς ΧΟΥ. Ἀνήκει ἑπομένως εἰς περιφέρειαν τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος μετὰ τῆς προηγουμένης.



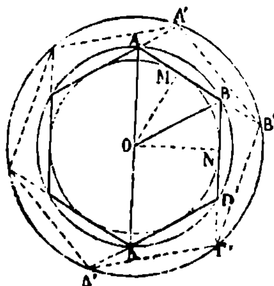
Σχ. 418 Β

Σημείωσις. Ἡ περιβάλλουσα τῶν περιφερειῶν τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καὶ διερχομένων διὰ τοῦ Ο, εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον Ο, ἐνῷ ἡ περιβάλλουσα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μία καμπύλη μὲ τέσσαρα σημεῖα ἀνακάμψεως, ἀνάλογος πρὸς τὴν *Ἀστροειδῆ* (§ 793 α).

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει μέγα ἀριθμὸν ἐνδιαφερουσῶν ἰδιοτήτων καὶ ὑπῆρξε τὸ ἀντικείμενον διαφόρων μελετῶν. (Ν. Α. 1861 σελ. 348 καὶ 351, Degranges, — 1874, σελ. 534, σημείωσις τοῦ Haton de la Coupilière, — 1875, σελ. 328, ἀρ. 2, Barbarin). Ἐπίσης *Mathesis* 1900 σελ. 244, Gino Loria, σελ. 247, Neuberg. Ἡ γενικὴ καμπύλη τῆς § 702 α ἐμελετήθη εἰς τὰ Ν. Α. ὑπὸ τῶν Merlieux (1842), σελ. 265, Joachimsthal (1847), σελ. 260, Bouteiller 1847, σελ. 263.

Θεώρημα 139

703. Ἕν πολύγωνον εἶναι κανονικὸν ἐὰν εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς δύο ὁμοκέντρους περιφερείας.



Σχ. 419.

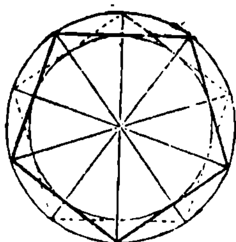
Ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι περιγράψιμον, ΟΜ = ΟΝ καὶ αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου Ο τῆς περιφερείας μὲ μεγαλυτέραν ἀκτῖνα.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν χορδῶν ἕπεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν.

Θεώρημα 139—I

704. Ἐὰν προεκτείνωμεν ἑκάστην πλευρὰν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ μῆκος, τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου (Σχ. 419).

Θεώρημα 139—II


Σχ. 420.

705. Δίδεται ἓν κανονικὸν πολύγωνον περιττοῦ πλήθους πλευρῶν λ. χ. πεντάγωνον. Προεκτείνομεν τὰ ἀποστήματα μέχρι τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ λαμβάνομεν τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἄλλου κανονικοῦ πενταγώνου ἴσου πρὸς τὸ πρῶτον. Δείξατε ὅτι αἱ τομαὶ τῶν πλευρῶν ἀνὰ δύο τῶν δύο πολυγώνων εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου (Σχ. 420).

Θεώρημα 140

706. Ἐὰν διὰ τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ γράψωμεν τρεῖς περιφερείας, τεμνομένας ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ :

1. *Αἱ γραμμαὶ αὗται διέρχονται διὰ τοῦ σημείου* Ο.

2. *Ἡ γωνία* ΑΟΒ *ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν* Γ *καὶ* Δ, *ἡ* ΒΟΓ *τῶν* Α *καὶ* Ε *καὶ ἡ* ΓΟΑ *τῶν* Β *καὶ* Ζ.

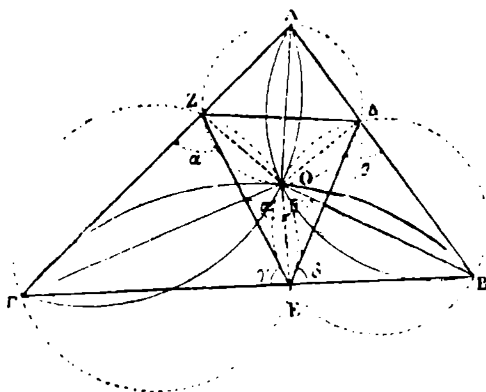
1. Ἔστω Ο τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν Α καὶ Β. Ἕνεκα τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων τοῦ σχήματος, ἡ $\widehat{ΖΟΔ}$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Α καὶ ἡ $\widehat{ΔΟΕ}$ παραπληρωματικὴ τῆς Β. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περὶ τὸ Ο καὶ τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ εἶναι 6 ὀρθαί, ἕπεται ἀμέσως ὅτι αἱ γωνίαι ΖΟΕ καὶ ἡ Γ εἶναι παραπληρωματικαί, δηλ. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΖΟΕ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κατὰ συνέπειαν ὅτι ἡ περιφέρεια ΖΓΕ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

2. *Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι* $\widehat{BOΓ} = A + E$ κλπ.

Ἄς παραστήσωμεν 2 ὀρθὰς γωνίας διὰ τοῦ γράμματος π. Ἔχομεν

$$\widehat{BOΓ} = \alpha' + \beta' = \alpha + \beta, \quad \alpha = \pi - (\widehat{Γ} + \gamma), \quad \beta = \pi - (\widehat{B} + \delta)\cdot$$

ἑπομένως $$\widehat{BOΓ} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{Γ}) + \pi - (\gamma + \delta) = \widehat{A} + \widehat{E}.$$



Σχ. 421.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος λαμβάνομεν τὸ ἑπόμενον πόρισμα καὶ τὸ ὁποῖον διατυποῦμεν εἰς θεώρημα ἕνεκα τῆς συχνῆς ἐφαρμογῆς του εἰς ζητήματα σχετικὰ μὲ τὸ μόνιμον κέντρον ὁμοιότητος (§ 2476 κ. ἑπ.).

Θεώρημα 140—I

706 α. Ἐὰν ἓν τρίγωνον ΔΕΖ, ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν ἄλλο ΑΒΓ, εἶναι μεταβλητὸν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος ἀλλὰ παραμένει πάντοτε ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν περιφερειῶν ΑΔΖ, ΒΔΕ καὶ ΓΕΖ μένει σταθερόν.

Πράγματι, αἱ γωνίαι $\widehat{A} + \widehat{E}$ κλπ. εἶναι σταθεραὶ καὶ τὸ σημεῖον Ο ὁρίζεται ὡς τομὴ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΟΓ, γωνίας $\widehat{A} + \widehat{E}$, καὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΓΟΑ, γωνίας $\widehat{B} + \widehat{Z}$.

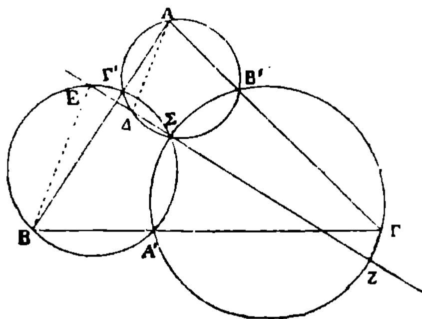
Σημείωσις. Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (§ 706), καθὼς καὶ τὸ τόσον ἀξιοσημείωτον καὶ γόνιμον εἰς ἐφαρμογὰς πόρισμα, ὀφείλονται καθ' ἡμᾶς εἰς τὸν Neuberg (J.M.E., 1886, σελ. 152, n° 8 καὶ N. C. 1880, τόμ. VI, σελ. 65, 72 κλπ.).

706β. Ἐπέκτασις. Ἐὰν λάβωμεν ἐφ' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου ἓν τυχὸν σημεῖον, αἱ τέσσαρες σφαῖραι, αἱ διερχόμεναι δι' ἑκάστης κορυφῆς καὶ τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν ἀκμῶν, αἵτινες συντέμνονται εἰς τὴν κορυφὴν ταύτην, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (S. Roberts).

(Διὰ τὴν ἀπόδειξιν: Mathesis, 1884, σελ. 16, ζήτημα. 45ον).

Θεώρημα 140—II

706γ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Γ', Α', Β' καὶ γράφομεν τοὺς κύκλους ΑΒ'Γ', ΒΓ'Α', ΓΑ'Β', τέμνοντας κατὰ τὰ Δ, Ε, Ζ σημεῖα τρεῖς παραλλήλους εὐθείας διὰ τῶν Α, Β, Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Σ τῶν τριῶν περιφερειῶν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας. (J.M.E. τοῦ Vuibert, 1893).



Σχ. 422.

Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΣΑΓ'Δ, ΣΒΕΓ', λαμβάνομεν:

$$\widehat{\Delta\Sigma\Gamma'} = \widehat{\Delta A\Gamma'}, \quad \widehat{E\Sigma\Gamma'} = \widehat{EB\Gamma'}$$

ἀλλὰ $\widehat{\Delta A\Gamma'} = \widehat{EB\Gamma'}$· ἄρα $\widehat{\Delta\Sigma\Gamma'} = \widehat{E\Sigma\Gamma'}$, δηλ. αἱ εὐθεῖαι ΣΔ καὶ ΣΕ συμπίπτουν. Ἀναλόγως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἡ ΣΔ εὐθεῖα συμπίπτει μετὰ τῆς ΣΖ καί, κατ' ἀκολουθίαν, ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Σ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Θεώρημα 140—III

707. **Τρεῖς περιφέρειαι μὲ κέντρα ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας καὶ τεμνόμεναι ἀνὰ δύο εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Ἀρκεῖ νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ θεώρημα 701. Αἱ τρεῖς περιφέρειαι — ὡς ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ Ο τοῦ σχ. 418 — διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ι τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.

Θεώρημα 141

708. **Δοθέντος ἑνὸς τετραπλεύρου, τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς τῶν πλευρῶν του, λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς, εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.**

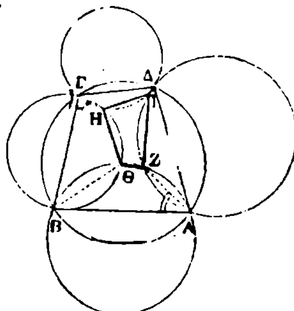
Πράγματι, τὰ ἐν λόγῳ κέντρα εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς ἀνὰ δύο τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου. Τὸ τετράπλευρον τῶν σημείων αὐτῶν ἔχει ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς (§ 551) καὶ ἑπομένως εἶναι ἐγγράψιμον.

Θεώρημα 141—Ι

709. Τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν πρὸς αὐτήν, ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

Θεώρημα 142

710. Δοθέντος ἐντὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, γράφομεν τέσσαρας τυχούσας περιφερείας ἐχούσας χορδὰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου. Δείξατε ὅτι τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.



Σχ. 423.

Αἱ τρεῖς γωνίαι περὶ τὸ σημεῖον Θ ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθάς, ἡ δὲ γωνία Θ τοῦ τετραπλεύρου ΖΘΗΙ ἰσοῦται, ἕνεκα τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραπληρωμάτων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν εἰς τὸ σημεῖον Θ· δηλαδὴ

$\widehat{H\Theta Z}$ ἢ $\widehat{\Theta} = \widehat{BAZ} + \widehat{B\Gamma H}$ καὶ ἀναλόγως $\widehat{ZIH}$ ἢ $\widehat{I} = \widehat{\Delta\Gamma H} + \widehat{\Delta A Z}$.

Ὅθεν $$\widehat{\Theta} + \widehat{I} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθαί}.$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο συσχετίζεται ἀπ' εὐθείας πρὸς τὰ καμπυλόγραμμα πολύγωνα. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου καμπυλογράμμου τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του καὶ ἀντιστρόφως. Ἀφ' ἑτέρου, αἱ καμπυλόγραμμοι γωνίαι δύο τεμνομένων περιφερειῶν εἰς τὰ σημεῖα τομῆς των εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἑπομένως, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς καμπυλογράμμους γωνίας:

$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = \widehat{B} + \widehat{\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{Z} + \widehat{H} = \widehat{\Theta} + \widehat{I},$$

δηλαδὴ τὸ (καμπυλόγραμμον τετράπλευρον) ΖΘΗΙ εἶναι ἐγγράψιμον.

Θεώρημα 142—Ι

710 β. Τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα, ἅτινα σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Πράγματι, αἱ πλευραὶ τοῦ λαμβανομένου τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο πρὸς τὰς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας, τὰς

συνδεούσας τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι τόξων τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ἀρχικὸν τετράπλευρον περιφερείας (N. C. M., 1874 - 75, σελ. 228. Ἐπίσης *Θεωρήματα* καὶ *προβλήματα* ὑπὸ Catalan, 6η ἔκδοσις 1878, σελ. 50).

Σημείωσις. 1) Τὸ ἴδιον ζήτημα τροποποιούμενον καὶ συμπληρούμενον δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἐνδιαφέροντα συμπεράσματα. (Δελτίον Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν τοῦ Ch. Michel, 1910, σελ. 194).

2) Κατὰ τὸ *Ἰαπωνικὸν θεώρημα* (§ 750 α), τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς μιᾶς διαγωνίου, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων διὰ τὰ τρίγωνα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς ἄλλης διαγωνίου.

Θεώρημα 143

711. Τέσσαρες εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουν τέσσαρα τρίγωνα. Αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς αὐτὰ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου M (Σημεῖον τοῦ Miquel).

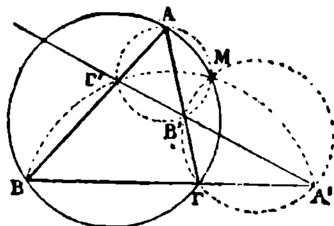
(*Μέθοδοι*, § 21).

Τὸ θεώρημα τοῦτο, μολονότι ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Miquel, ἀνήκει εἰς τὸν Steiner, καθὼς καὶ πολλὰ ἄλλα μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὸ *θεώρημα τοῦ Aubert* (§ 767).

Σημείωσις. Ὁ κύκλος τῶν πέντε σημείων ἑνὸς τετραπλεύρου ἢ *κύκλος τοῦ Miquel* (§ 711, Σημείωσιν) ὑπῆρξε ἀντικείμενον σπουδῆς εἰς πολλὰ ζητήματα· ὁ L. Ripert ἀπέδειξεν ὅτι διέρχεται διὰ 25 ἀξιοσημειώτων σημείων τοῦ τετραπλεύρου.

Θεώρημα 143—I

711 α. Μία τυχοῦσα διατέμνουσα ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευράς του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κατὰ τὰ σημεῖα Γ′, Α′, Β′. Δείξατε ὅτι αἱ περιφέρειαι ΑΒ′Γ′, ΒΓ′Α′, ΓΑ′Β′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου M, κειμένου ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας.



Σχ. 424.

Εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ προηγούμενον ζήτημα. (Πρβλ. § 819).

Παρατήρησις. Αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου M ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἐπὶ τῆς διατεμνούσης κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (βλ. §767 καὶ 2464, 2).

711 β. Σημ. Τὸ κοινὸν σημεῖον M τῶν τεσσάρων κύκλων, ἢ *τὸ σημεῖον τοῦ Miquel*, εἶναι ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς τῆς ἐφαπτομένης τῶν τεσσάρων εὐθειῶν (πλευρῶν καὶ διατεμνούσης) (§ 2166, 2).

Τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς καὶ τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ὀνομαζομένης *περιφερείας τοῦ Miquel* ἢ ὀρθότερον τοῦ *Steiner* (Πρβλ. ἑπόμενον θεώρημα § 712). Σχετικὰ πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον εὑρίσκονται εἰς: Intermédiaire des Mathématiciens (1902) σελ. 52 καὶ 165, n° 2184, σελ. 261. n°

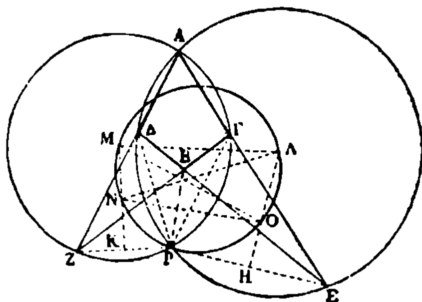
2441· σελ. 282 n° 2184, J. M. E. (1882). Κατὰ τὸν C. Ripert, τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐπὶ 9 κύκλων καὶ 12 εὐθειῶν ἀξιοσημειώτων.

Θεώρημα 144

712. Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τέσσαρες εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. (Steiner, An. d. Gerg., τόμ. XVIII, 1827-28, σελ. 302).

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον τῶν τεσσάρων εὐθειῶν καὶ Ε, Ζ αἱ τομαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

Αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα διέρχονται, κατὰ τὸ θεώρημα § 711, διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P καὶ τὰ τέσσαρα ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΓΡΖ, ΑΔΡΕ, ΒΓΕΡ, ΒΔΖΡ ἔχουν ἀνὰ δύο μίαν πλευρὰν κοινήν. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων εἰς αὐτὰ περιφερειῶν ὑψοῦμεν καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν κοινῶν αὐτῶν πλευρῶν.



Σχ. 425.

Εἰς τὰ τετράπλευρα ΑΔΡΕ, ΒΓΕΡ τὰ κέντρα Λ καὶ Ο εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΟΛ. διὰ τὰ ΑΔΡΕ, ΒΔΖΡ τὰ κέντρα Λ καὶ Ν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΡ κλπ. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον τῶν κέντρων ΛΜΝΟ εἶναι ἐγγράψιμον, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{\text{ΜΛΟ}} = \widehat{\text{ΟΜΝ}}$ ἤ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν ΔΡΕ καὶ ΓΡΖ ἀντιστοίχως, ὅτι αἱ δύο τελευταῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀληθές, ἀφοῦ ἑκάστη εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας ΖΑΕ.

712 α. Σημείωσις. Ἡ ἐκφώνησις τοῦ πλήρους θεωρήματος τοῦ Steiner εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ τεμνόμεναι ἀνὰ δύο κατὰ ἕξ σημεῖα καὶ κείμεναι ἐπομένως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου:

1) Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι αὐταί, λαμβανόμεναι ἀνὰ τρεῖς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P.

2) Τὰ κέντρα Λ, Μ, Ν, Ο τῶν τεσσάρων τούτων περιφερειῶν εὑρίσκονται μετὰ τοῦ σημείου P ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς πέμπτου κύκλου.

3) Οἱ πόδες τῶν καθέτων ἐκ τοῦ P ἐπὶ τὰς εὐθείας, Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας R καὶ ἡ ἰδιότης αὐτὴ *χαρακτηρίζει* τὸ σημεῖον P.

4) Τὰ τέσσαρα ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων (1) εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας R'.

5) Αἱ εὐθεῖαι R καὶ R' εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ εὐθεῖα R διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ P ἐπὶ τὴν R'.

6) Τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου Α,Β,Γ,Δ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας R'' (Newton).

7) Ἡ εὐθεῖα R'' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς R καὶ R'.

8) Αἱ περιφέρειαι αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων (1) καὶ αἱ παρεγγεγραμμέναι εἰς αὐτὰ — 16 ἐν ὅλῳ — ἔχουν τὰ κέντρα των, ἀνὰ τέσσαρες, ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Οὕτω λαμβάνομεν 8 νέας περιφερείας.

9) Αἱ περιφέρειαι αὗται χωρίζονται εἰς δύο ὁμάδας· ἑκάστη τῶν τεσσάρων περιφερειῶν τῆς μιᾶς ὁμάδος τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας τῆς ἄλλης ὁμάδος. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο ὁμάδων εὑρίσκονται ἐπὶ δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας.

10) Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον P.

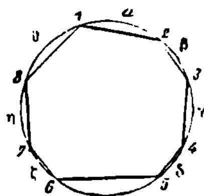
712β. Σημείωσις. Τὰ *Annales de Gergonne* δὲν ἔχουν τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τοῦ Steiner. Διάφοροι μαθηματικοὶ ἠσχολήθησαν μὲ αὐτὰ καὶ ἰδιαιτέρως ὁ Miquel κατὰ τὸ 1836. Τὸ 1878 ὁ Kantor (Βιέννη) ἐχρησιμοποίησεν τὸν ὅρον *σημεῖον τοῦ Miquel* ἑνὸς τετραπλεύρου· *κύκλος τοῦ Miquel* ἐπίσης ὠνομάσθη καὶ ὁ κύκλος τῶν πέντε σημείων Μ, Ν, Λ, Ο καὶ P.

Βιβλ/φία : N. A. (1878), σελ. 325, σχλ. : τοῦ *Catalan*· Int. d. Math' (1899), σελ. 197· αὐτ. (1900), σελ. 221· αὐτ. (1902), σελίδ. 52, 165, 282.

Θεώρημα 146

713. Εἰς πᾶν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἀρτίας τάξεως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιττῆς τάξεως.

Λαμβάνοντες τὸ διπλάσιον τοῦ μέτρου ἑκάστης ἐγγεγραμμένης γωνίας, μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις :



Σχ. 426.

$$\widehat{1} = \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} + \widehat{\varepsilon} + \widehat{\zeta} + \widehat{\eta}$$

$$\widehat{3} = \widehat{\delta} + \widehat{\varepsilon} + \widehat{\zeta} + \widehat{\theta} + \widehat{\eta} + \widehat{\alpha}$$

$$\widehat{5} = \widehat{\zeta} + \widehat{\eta} + \widehat{\theta} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$$

$$\widehat{7} = \widehat{\theta} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} + \widehat{\varepsilon} \quad \text{ἄρα}$$

$\widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{5} + \widehat{7} =$ τὸ τριπλάσιον τῆς περιφερείας. Τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς γωνίας ἀρτίας τάξεως. Εἰς τὸ παράδειγμα, ἕκαστον ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς ἓξ ὀρθὰς γωνίας.

714. Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου μὲ 2ν πλευρὰς εἶναι (2ν — 2). 2 ὀρθαί. Ἐπομένως, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστης ὁμάδος τοῦ θεωρηθέντος προηγουμένως πολυγώνου εἶναι (2ν—2) ὀρθαὶ γωνίαι ἢ *τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι ὅσαι καὶ αἱ πλευραὶ μεῖον 2.*

1ον. Θεώρημα τοῦ Poncelet 146

715. Ἐὰν δύο ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον πολύγωνα, ἐκ 2ν πλευρῶν ἕκαστον, ἔχουν 2ν — 1 πλευρὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως, αἱ δύο τελευταῖαι πλευραὶ εἶναι ἐπίσης παράλληλοι.

Ἐὰν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι αἱ πλευραὶ αὗται, εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β τοῦ πρώτου πολυγώνου καθὼς καὶ αἱ Α', Β' τοῦ δευτέρου ὁρίζονται συναρτήσει τῶν ὑπολοίπων γωνιῶν εἰς ἕκαστον πολύγωνον. Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς σκέψεως ὅτι τὰ πολύγωνα εἶναι ὀκτάγωνα καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β ἀνήκουν εἰς διαφόρους τάξεις (§ 713), ἂν δὲ $\widehat{M}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄλλων γωνιῶν τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκει ἡ $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{N}$ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄλλων γωνιῶν τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκει ἡ Β, ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\widehat{A} = 6 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{M}, \quad \widehat{B} = 6 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{N}.$$

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς γωνίας Α' καὶ Β' τοῦ δευτέρου πολυγώνου τὰς σχέσεις

$$\widehat{A'} = 6 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{M'}, \quad \widehat{B'} = 6 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{N'}.$$

Ἀλλὰ $\widehat{M} = \widehat{M'}$, $\widehat{N} = \widehat{N'}$, ἐκ τῆς παραλληλίας τῶν ὑπολοίπων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ὅθεν

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'},$$

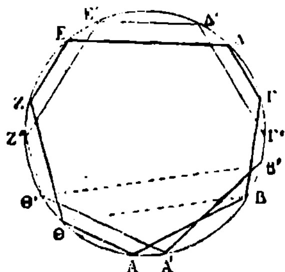
δηλ. αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι.

716. Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἓν πολύγωνον ἐκ 2ν πλευρῶν μεταβάλλεται εἰς τρόπον ὥστε νὰ μένῃ πάντοτε ἐγγεγραμμένον εἰς σταθερὸν κύκλον, 2ν—1 δὲ πλευραί του νὰ παραμένουν παράλληλοι πρὸς ὡρισμένας διευθύνσεις, ἡ τελευταία πλευρά του μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν (Ν.Α. (1850) σελ. 136).

2ον Θεώρημα τοῦ Poncelet 146—I

717. Ἐὰν ἓν πολύγωνον ἐκ 2ν+1 πλευρῶν μεταβάλλεται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μένῃ πάντοτε ἐγγεγραμμένον εἰς σταθερὸν κύκλον, 2ν δὲ πλευραί του νὰ παραμένουν παράλληλοι πρὸς ὡρισμένας διευθύνσεις, ἡ τελευταία πλευρά του διατηρεῖ πάντοτε σταθερὸν μέγεθος.



Σχ. 427.

Ἔστωσαν ΑΒΓ...ΘΑ, Α'Β'Γ'...Θ'Α' δύο θέσεις τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ. Θὰ πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι: ΑΒ=Α'Β'. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΘ καὶ Β'Θ'· διὰ τὰ πολύγωνα ΒΓ...ΘΒ καὶ Β'Γ'...Θ'Β', ἀρτίου ἀμφότερα πλήθους πλευρῶν, ἰσχύει τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἐπομένως ἡ

χορδὴ ΒΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Β'Θ'. Καὶ ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ΘΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Θ'Α', γίνεται ἀμέσως φανερὸν ὅτι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΘΒ καὶ Α'Θ'Β' εἶναι ἴσαι καὶ βαίνουν κατὰ συνέπειαν ἐπὶ ἴσων χορδῶν.

Θεώρημα 147

717 α. Ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον πολυγώνου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του εἶναι περιττὸς ἀριθμός. (J. M. E. (1905), n° 6020).

Ἔστω, διὰ τὴν ἁπλότητα τῶν συλλογισμῶν, ἓν πεντάγωνον· ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αἱ ἑκατέρωθεν μιᾶς δοθείσης εἶναι ἴσαι προφανῶς, θὰ ἔχωμεν $\alpha = \gamma = \varepsilon$ καὶ $\beta = \delta = \varepsilon$· δηλ. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἦτο ἀρτίου πλήθους πλευρῶν, φερ' εἰπεῖν ἑξάγωνον ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$), αἱ πλευραὶ ἀρτίας τάξεως β, δ, ζ θὰ ἦσαν ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ πλευραὶ $\alpha, \gamma, \varepsilon$ περιττῆς τάξεως· οὐδὲν ὅμως δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν α καὶ β.

Θεώρημα 148

718. Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων ἢ *κύκλος τοῦ Euler*. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ἀπὸ τῶν κορυφῶν εἰς τὸ ὀρθόκεντρον, εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας (Euler, Memoire de Saint Petersbourg, 1765).

(*Μέθοδοι*, § 27· ἐπίσης 720).

Θεώρημα 149

719. α) Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τὸ ὀρθόκεντρον μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας.

β) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. (Μέθοδοι § 28· ἐπίσης § 1262).

γ) Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον τῶν 9 σημείων εἰς τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς καὶ ἡ πλευρὰ αὕτη εἶναι ἀντιπαράλληλοι, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἀπέναντι γωνίαν (Μέθοδοι § 28, 3).

720. Κρίνομεν σκόπιμον νὰ ἐπαναλάβωμεν ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξιν τῆς βασικῆς προτάσεως (§ 718), ἕνεκα τῶν πολυαρίθμων ἐφαρμογῶν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ.

Ἔστωσαν, Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, ΑΚ, ΓΘ δύο ὕψη, Η ἡ τομή των καὶ Λ τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια ΔΕΖ διέρχεται διὰ τῶν Κ καὶ Λ.

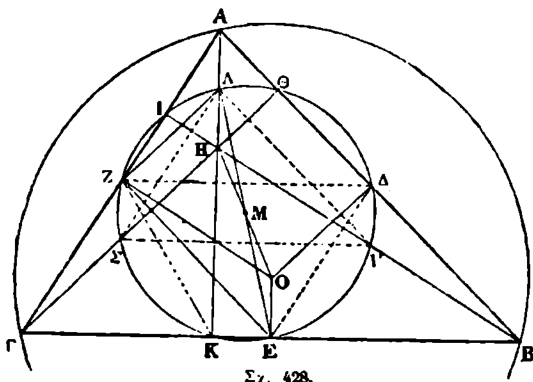
1) Φέρομεν τὴν ΖΚ. Τὸ τραπέζιον ΕΔΖΚ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐγγράψιμον. Πράγματι, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΚ, ἡ διάμεσος $ZK = Z\Gamma$. Ἀλλὰ $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} = Z\Gamma$, ἄρα $E\Delta = KZ$. Ἤτοι ἡ περιφέρεια ΔΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ Κ.

2) Ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν ΑΓ καὶ ΑΗ εὐθεῖα ΖΛ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ καὶ ἡ ΖΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἑπομένως

$$\widehat{\Lambda Z E} = 1 \text{ ὀρθή}$$

καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΛΖΚ ἐγγράψιμον. Εἶναι λοιπὸν τὸ Λ σημεῖον τῆς περιφερείας (ΔΕΖ).

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΛΕ εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας αὐτῆς, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΛΖΕ ἢ ΛΚΕ.



Σχ. 428.

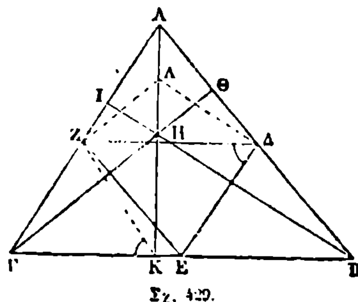
Ἄλλη ἀπόδειξις. *Ἡ περιφέρεια* ΔΕΖ :

1) *διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς* Κ, ἐπειδὴ $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΖΚΓ}$ καὶ τὸ τετράπλευρον ἄρα ΔΕΚΖ ἐγγράψιμον.

2) *διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Euler* Λ, ἐπειδή :

$$\widehat{ΕΖΛ} = \widehat{ΑΘΓ} = 90^\circ, \quad \widehat{ΕΔΛ} = \widehat{ΑΙΒ} = 90^\circ,$$

(ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους ἀντιστοίχως) καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τετράπλευρον ΔΕΛΖ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 429.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα ΛΕ εἶναι διάμετρος.

2) Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (Σχ. 428)· αἱ ΟΔ καὶ ΟΖ εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΛΔΕ εἶναι ὀρθὴ (ΛΕ διάμετρος) ἡ γωνία ΟΖΓ εἶναι ἐπίσης ὀρθή· ἀφ' ἑτέρου ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἑπομένως ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΔΛ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΓ ἢ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη, ἡ εὐθεῖα ΖΛ, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Ζ καὶ Λ τῶν ΑΓ καὶ ΑΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ὕψος ΓΗ, ἄρα

καὶ πρὸς τὴν ΟΔ, τὸ τετράπλευρον ΟΔΛΖ ἀποδεικύεται παραλληλόγραμμον. Κατ' ἀκολουθίαν

$$ΔΛ = ΟΖ, \quad ΟΔ = ΖΛ = \frac{1}{2} ΓΗ.$$

Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τὰ ἑπόμενα θεωρήματα (§§ 722 - 725).

721 α. Σημείωσις. Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων διέρχεται καὶ διὰ πολλῶν ἄλλων σημείων καὶ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας (βλ. §§ 27, 292 κ, 727, 732, 733).
Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι καὶ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ὀρθοκέντρου αὐτοῦ (§ 2183 γ).

Βιβλιογραφία: Int. d. Math. (1898), σελ. 208, n° 1256· Mathesis (1891), σελ. 192· N.A. (1863), σελ. 475, 476.

721 β. Θεώρημα. *Ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, ἠλαττωμένον κατὰ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, ἰσοῦται πρὸς* $\frac{α^2 + β^2 + γ^2}{2}$. (Mathesis (1906), σελ. 32, Edmond de Puydt).

Θεώρημα 149—I

722. *Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ σημεῖον τοῦ Euler ἑνὸς ὕψους μετὰ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν περιεχουσῶν αὐτὸ πλευρῶν, εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν.*

Πράγματι, ἀπεδείχθη (§ 721) ὅτι ἡ ΔΛ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν κάθετον ΟΖ (Σχ. 428).

Θεώρημα 149—II

723. *Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς ἓν τρίγωνον περιφερείας ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης κορυφῆς.*

Πράγματι:

$$ΖΛ = \frac{1}{2} ΓΗ, \quad ΔΟ = ΖΛ, \quad ἄρα \quad ΔΟ = \frac{1}{2} ΓΗ.$$

Ἀναλόγως:

$$ΟΕ = \frac{1}{2} ΑΗ = ΑΛ = ΛΗ \qquad (Σχ. 428)$$

Θεώρημα 149—III

724. **Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ σημεῖα τοῦ Euler ἑνὸς τριγώνου μετὰ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἶναι διάμετροι τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων, ἰσοῦνται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τέμνονται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης μετὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.**

Ἡ εὐθεῖα ΛΕ (Σχ. 428) εἶναι διάμετρος καθὼς καὶ ἡ ΖΚ, αἱ

...νται ΟΕ καὶ ΛΗ παράλληλοι καὶ ΟΕ = ΑΛ = ΛΗ· τὰ σχήματα ἑπομένως ΑΛΕΟ, ΛΗΕΟ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἄρα ΛΕ = ΑΟ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΛΕ καὶ ΗΟ τέμνονται εἰς τὰ μέσα των, ὡς διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΛΗΕΟ.

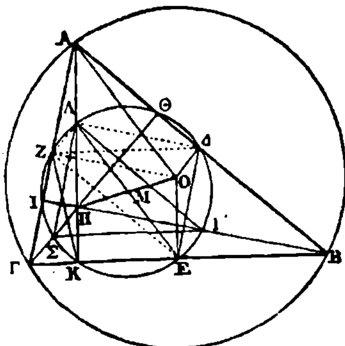
Ἡ διάμετρος ΛΜΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΟ, ἥτις εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὁμοίων σχημάτων, ἕπεται εὐκόλως ἡ σχέσις τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας μετὰ τῆς τῶν ἐννέα σημείων. Ἐπειδὴ αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι περιγεγραμμέναι εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ καὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των εἶναι $\frac{1}{2}$ (§ 1119).

Θεώρημα 149—IV

725. Ἓν τρίγωνον καὶ τὰ τρίγωνα μὲ βάσιν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος καὶ κορυφὴν τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ, ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων.

Ἔστω ΒΓΗ (Σχ. 430) ἓν ἐκ τῶν ἐν λόγῳ τριγώνων, Σ, Ε, Ι' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Ἡ περιφέρεια τοῦ Euler τοῦ τριγώνου αὐτοῦ διέρχεται διὰ τῶν μέσων, Ε καὶ Σ, τῶν πλευρῶν του ΒΓ καὶ ΓΗ, καθὼς καὶ διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ἀποστάσεως μιᾶς κορυφῆς του, τῆς Β, ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ὕψῶν του, ταυτιζομένου, ὡς ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, πρὸς τὸ Α. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουν, ἐξ ὁρισμοῦ, εἰς τὸν κύκλον τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 430

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα τοῦ Euler ἐπὶ τῶν τριῶν ὕψῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι ἑπόμενον νὰ μετέχουν κοινῶν ἰδιοτήτων. Ἐπειδὴ οἱ ρόλοι των ἐναλλάσονται εἰς τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ συνόλου τῶν τεσσάρων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΗ, ΒΓΗ καὶ ΓΑΗ. Ἐκ τῶν πολλῶν συνεπειῶν, ἂς δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων, ἀναφέρομεν ἀκόμη καὶ τὴν ἀκόλουθον, βασιζομένην εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΗΟ εἶναι καὶ μέσον τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὴν κορυφὴν Γ μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΒ.

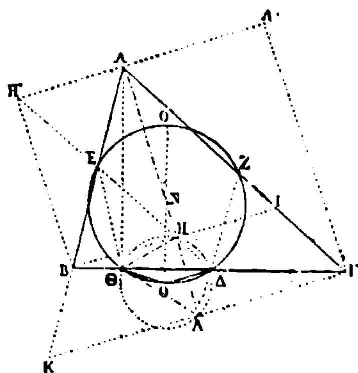
Θεώρημα 149—V

726. Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΗ, ΒΓΗ καὶ ΓΑΗ εἶναι ἴσαι. Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν καὶ τὸ σημεῖον Η μετὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀντιστοίχου περιγεγραμμένης περιφερείας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

Παρατήρησις. Πολλά τῶν προηγουμένων θεωρημάτων ὀφείλονται εἰς τὸν Carnot (*Geométrie de position* nos 129, 130, σελ. 162).

Θεώρημα 149—VI

727. **Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία ΔΕΘ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ μέσον Ε μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ μετὰ τοῦ μέσου Δ καὶ τοῦ ποδὸς Θ τοῦ ἐπὶ μίαν ἄλλην πλευρὰν ΒΓ ὕψους, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.**



Σχ. 431.

Ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΓ· ἐπομένως

$$\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΘΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ διάμεσος ΕΘ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΕΒΘ εἶναι ἰσοσκελές. Ὥστε

$$\widehat{B\Theta E} = \widehat{B} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Delta E\Theta} + \widehat{B\Delta E} = \widehat{B}.$$

Δηλαδή: $\widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}.$

Θεώρημα 149—VII.

728. **Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΑΛ (Σχ. 431) τῆς γωνίας Α καὶ τὰς καθέτους ΒΗ, ΓΛ ἐπ' αὐτήν, τὸ τετράπλευρον ΔΗΘΛ εἶναι ἐγγράψιμον.**

Ἄς προεκτείνωμεν τὰς ΒΗ καὶ ΓΛ μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν· τὰ τρίγωνα ΑΒΙ καὶ ΑΓΚ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΛ, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν ΓΒ καὶ ΓΚ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ εὑρίσκεται ἐπομένως ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΔ.

Ὥστε $\widehat{\Delta\Lambda H} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΗΒ, ΑΘΒ εἶναι ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον ΑΒΘΗ εἶναι ἐγγράψιμον· ἄρα $\widehat{H\Theta\Delta} = \widehat{BAH} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ καὶ τὸ τετράπλευρον ΔΗΘΛ εἶναι ἐπίσης ἐγγράψιμον, ὡς ἔχον τὰς γωνίας ΔΛΗ καὶ ΔΘΗ ἴσας.

729. *Πορίσματα*. 1) Ἡ εὐθεῖα ΔΗ, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα Δ καὶ Η τῶν ΒΓ καὶ ΒΙ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διέρχεται διὰ

τοῦ Ε καὶ σχηματίζει γωνίαν $\widehat{B\Delta H} = \widehat{\Gamma}$. Ἀλλὰ $\widehat{\Theta\Lambda H} = \widehat{\Theta\Delta H} = \widehat{\Gamma}$.

Ὥστε $\widehat{\Theta\Lambda\Delta} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}$.

2) Ἐὰν Η′ καὶ Λ′ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν Β, Γ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, τὸ τετράπλευρον ΔΘΗ′Λ′ εἶναι ἐγγράψιμον.

3) Ἡ εὐθεῖα ΔΗΕ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Η′.

Θεώρημα 149—VIII.

730. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΔΗΘΛ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 431), ὡς καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΔΘΗ′Λ′.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΘΗΔΛ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\widehat{\Delta O\Theta} = 2\widehat{\Delta\Lambda\Theta} = 2\left(\frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{A}}{2}\right) = 2\widehat{\Gamma} + \widehat{A},\ \widehat{\Delta E\Theta}\ (\S\ 727) = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} \text{ καὶ}$$

ἑπομένως $\widehat{\Delta O\Theta} + \widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$. Ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΔΟΘΕ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ τὸ σημεῖον Ο θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας δηλ. ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται διὰ τῶν Δ, Ε, Θ σημείων.

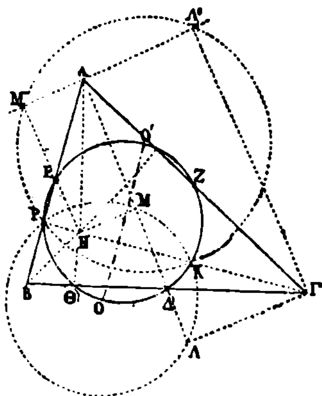
731. Παρατήρησις. 1) Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὸ κέντρον Ο′ τοῦ κύκλου ΔΘΗ′Λ′ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου.

2) Μεταφέροντες τοὺς συλλογισμούς μας τῶν τριῶν τελευταίων προτάσεων καὶ ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ὁδηγούμεθα εἰς *ἓξ ἐν ὅλῳ κέντρα* κύκλων, κειμένων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Euler τοῦ τριγώνου.

3) Τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΟΝΟ′ τῆς περιφερείας τοῦ Euler, τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΘ.

Θεώρημα 149—IX

732. Ὁ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων ἑνὸς τριγώνου διέρχεται διὰ τῶν κέντρων εἴκοσι τεσσάρων κύκλων, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀπ᾽ εὐθείας.



Σχ. 432

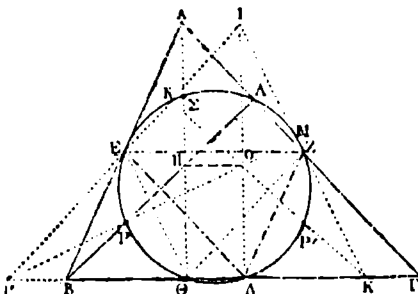
Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΗ, ΑΓΗ καὶ ΒΓΗ ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων (§ 726), ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται αἱ τέσσαρες ἑξάδες τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, περὶ ὧν ἡ 2α παρατήρησις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Παράδειγμα. Ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου ΓΑΗ, λ. χ. ἡ τῆς γωνίας Α, ὁρίζει τὰς περιφερείας μὲ κέντρα τὰ Ο καὶ Ο′ (ἐστιγμένας).

Ἡ περιφέρεια (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΓΗ, διὰ τοῦ ποδὸς Ρ τῆς καθέτου ΑΡ ἐπὶ τὴν ΓΗ, καὶ διὰ τῶν προβολῶν Λ, Μ τῶν κορυφῶν Γ, Η ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΜΛ.

733. Παρατήρησις. 1) Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπ' ἄπειρον τὸν ἀριθμὸν τῶν σημείων τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Πράγματι, ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ—τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν *διάμεσον τρίγωνον* ἢ κατὰ τὸν Neuberg *συμπληρωματικὸν* (§ 432).



Σχ. 433.

Ἂν λάβωμεν τὸν πόδα Θ τοῦ ὕψους ΑΘ, ὡς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἑνὸς τριγώνου, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΖΘ εἶναι τὸ *διάμεσον τρίγωνον* εἰς ὃ εἶναι περιγεγραμμένη ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων. Φέροντες δὲ διὰ τῶν κορυφῶν Ε, Ζ, Θ παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς (τοῦ ΕΖΘ), λαμβάνομεν τὸ ΙΙ′Κ ὡς ἀρχικὸν τρίγωνον.

Τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Θ εἶναι κοινὰ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΙΙ′Κ, καθὼς καὶ τὸ σημεῖον Ρ, μέσον τῶν ΒΗ καὶ ΟΙ′, καὶ Ρ′, μέσον τῶν ΟΚ καὶ ΓΗ. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ τρία νέα σημεῖα: τὸ μέσον τῆς ΟΙ καὶ οἱ πόδες Μ, Ν τῶν ὑψῶν Ι′Μ καὶ ΚΝ τοῦ νέου τριγώνου.

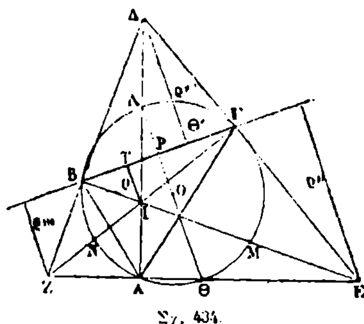
Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν δύο ἄλλα τρίγωνα ἀνάλογα πρὸς τὸ ΙΙ′Κ καὶ νὰ ὁρίσωμεν οὕτω ἐπὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων *ἐννέα ἐν συνόλῳ νέα σημεῖα*.

734. 2) Τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ΕΣΖ θὰ ἦτο τὸ *διάμεσον ἢ συμπληρωματικὸν τρίγωνον* δὲν μᾶς δίδει παρὰ δύο μόνον νέα σημεῖα. Ἐπειδὴ τὸ μέσον τῆς ΟΙ θὰ εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους, τοῦ ἀγομένου ἐπὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ πλευράν, καὶ τὸ Δ τὸ *σημεῖον τοῦ Euler*. Τὰ δύο ἄλλα ὕψη θὰ διέλθουν διὰ τῶν Ρ καὶ Ρ′. Ἀναλόγως, τὸ τρίγωνον ΕΛΖ θὰ ὁρίσῃ δύο νέα σημεῖα. Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ τέσσαρα ἄλλα, ἀνάλογα πρὸς τὰ θεωρηθέντα, τρίγωνα διὰ τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ τοῦ ἀρχικοῦ διαμέσου τριγώνου, φθάνομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν *δώδεκα νέων σημείων* κλπ.

Ἐκ τοῦ σχήματος 433 ὁ Plakovo ἀποδεικνύει ὅτι 48 ἀξιοσημείωτοι διὰ τὸ τρίγωνον κύκλοι ἐφάπτονται τοῦ *κύκλου τῶν ἐννέα σημείων*. (Βλ. ἑπομ. § 1341 β, σημείωσις).

Θεώρημα τοῦ Mention 150

735. Τὰ κέντρα τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς αὐτὸ περιφερειῶν, ἑνούμενα ἀνὰ δύο, ὁρίζουν ἓξ τμήματα· δείξατε, ὅτι τὰ ἓξ μέσα τῶν τμημάτων αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας. (Mention, N. A. (1850) σελ. 324).



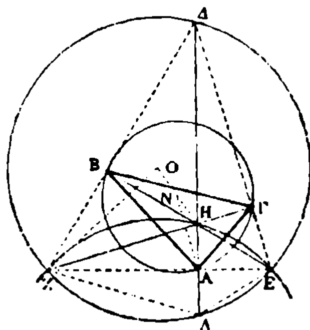
Σχ. 434.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον, Ι, Δ, Ε. Ζ τὰ τέσσαρα κέντρα (Σχ. 434). Ἐπειδὴ αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους, θὰ εἶναι καὶ ὕψη τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ἐπομένως, ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ διέρχεται, κατὰ τὰ προηγούμενα, διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΙΔ καθὼς καὶ διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ΕΖ.

Παρατήρησις. Ἡ ΛΘ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων (§ 721, παρατήρησις).

Θεώρημα 150—I

735 α. Ἡ περιφέρεια, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν κέντρων Δ, Ε, Ζ, Η τριῶν τυχουσῶν ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ περιφερειῶν, εἶναι διπλασία τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας (A. d. Gerg. τόμ. XII, 1821-22 σελ. 321).



Σχ. 434 α

Τὸ κέντρον Η τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΔΕΖ· ἐπομένως, ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ ΑΒΓ εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τοῦ ΔΕΖ· ἄρα

$$ZO = 2AN.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ΑΛ = ΑΗ· ἄρα: περιφέρεια ΕΗΖ = περιφέρεια ΔΕΖ.

735 β. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις, ἐκτὸς τῆς παρηλλαγμένης ὁρολογίας καὶ διαφόρων ἁπλουστεύσεων, εἶναι ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ J.-H. Durrande. Δύο ἄλλαι ἀποδείξεις ἀνεκοινώθησαν ὑπὸ τῶν Pagani καὶ Querret εἰς A. d. Gerg., τόμ. XIII, 1822-23, σελ. 141).

Θεώρημα 151

736. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τρίγωνον περιφερειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, ηὐξημένην κατὰ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Ἔστωσαν (Σχ. 434), R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ρ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης, ρ_α, ρ_β, ρ_γ αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ. Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $ΙΤ = \rho$, $ΔΘ' = \rho_\alpha$, $ΛΘ = 2R$.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Λ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΙ:

$$ΛΡ = \frac{\rho_\alpha - \rho}{2} \quad (\S\ 436,\ 3\eta\ \pi\varepsilon\rho/\sigma\iota\varsigma)$$

$$ΘΡ = \frac{\rho_\beta + \rho_\gamma}{2}.$$

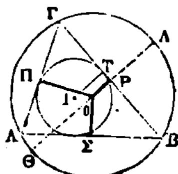
Ἐπομένως: $$ΛΘ = ΛΡ + ΡΘ = 2R = \frac{\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho}{2}$$

ἢ $$4R + \rho = \rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma.$$

Σημείωσις. τὸ θεώρημα εἶναι τοῦ Bobillier. (*A. d. G.*, τόμ. XIX, 1827 - 28, σελ. 85 καὶ 90).

Θεώρημα 152

737. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἐπὶ ἑκάστην πλευράν. (Carnot, Γεωμετρία Θέσεως, n° 187, σελ. 167.—Ἀπόδειξις Mention— N. A., 1850, σελ. 325).



Σχ. 435

Ἔστωσαν δ_α, δ_β, δ_γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς α, β, γ. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εὕρομεν:

$$ΛΡ = \frac{\rho_\alpha - \rho}{2},$$

ἄρα $\delta_\alpha = R - ΛΡ = R - \frac{\rho_\alpha - \rho}{2}$ ἢ $2R = 2\delta_\alpha + \rho_\alpha - \rho$. Ἀναλόγως εὑρίσκομεν: $2R = 2\delta_\beta + \rho_\beta - \rho$, $2R = 2\delta_\gamma + \rho_\gamma - \rho$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς τρεῖς τελευταίας σχέσεις, λαμβάνομεν:

$$6R = 2(\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma) + \rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - 3\rho.$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι: $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$. Ἐπομένως:

$$\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma = R + \rho \quad (\alpha).$$

Παρατήρησις. Ἔστωσαν β_1, β_2, β_3 τὰ τρία βέλη τῶν τόξων τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ

$$\beta_1 = R - \delta_\alpha, \quad \beta_2 = R - \delta_\beta, \quad \beta_3 = R - \delta_\gamma$$

ἔπεται $$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2R - \rho.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον, τὸ κέντρον Ο εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς πρέπει νὰ ληφθῇ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον. Ἂν λ. χ. ἡ δ_γ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, ἡ σχέσις (α) γίνεται

$$R + \rho = \delta_\alpha + \delta_\beta - \delta_\gamma .$$

737 α. Σημείωσις. 1) Ἐπὶ τοῦ *τύπου τοῦ Carnot*, ὑπάρχει ἓν πολὺ ἐνδιαφέρον ἄρθρον τοῦ Steiner εἰς A. d. G., τόμ. XIX, σελ. 85. Ἐπίσης: ἄρθρον τοῦ Jamet εἰς N. A. (1872) σελ. 34.—Nouy: *Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου*, σελ. 40, τύπος 20.—Mathesis (1904), σελ. 10, ἄρθρον τοῦ Droz-Farny καὶ σημείωσις τοῦ Neuberg. Πρβλ. ἑπομ. § 1453 γ.

2) Ἔχομεν ἐπίσης τὴν σχέσιν

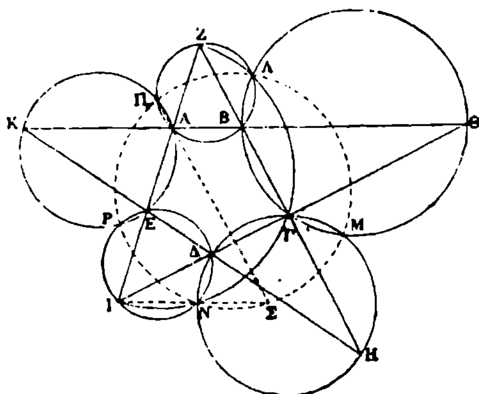
$$R - \rho = \frac{\alpha^2\rho_\alpha + \beta^2\rho_\beta + \gamma^2\rho_\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} .$$

(Mathesis (1906), σελ. 144, ζήτημα 1573, ὑπὸ Verkaart).

Πεντάγραμμον τοῦ Miquel 152—I

737 β. *Εἰς τὰ πέντε τρίγωνα, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἑνὸς πενταγώνου καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τῶν παρακειμένων εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν, περιγράφομεν περιφερείας. Δείξατε ὅτι τὰ (δεύτερα) σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*

Ἔστωσαν ΑΒΖ, ΒΓΘ κλπ. τὰ ἐν λόγῳ τρίγωνα, Λ, Μ, Ν, Ρ, Π τὰ πέντε σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν.



Σχ. 435 β.

Εἰς τὸ πλῆρες τετράπλευρον ΑΒΓΙΘΖ, αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΒΓΘ, ΖΓΙ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Λ (§§ 21 καὶ 711). Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ πλῆρες τετράπλευρον ΓΔΕΖΙΗ, ὅπου αἱ περιφέρειαι ΓΔΗ, ΕΔΙ, ΖΓΙ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Ν. Ἑπομένως ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΖΓΙ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Λ καὶ Ν.

Ἔστω τώρα Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς περιφερείας ΑΕΚ μετὰ τῆς ΑΒΖ. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ΑΒΖ, ΖΓΙ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον Λ μετὰ τῆς περιφερείας ΛΝΠ (ἐστιγμένης), ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΑΙ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ζ τῶν δύο πρώτων περιφερειῶν, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΠΑ καὶ ΙΝ προεκτεινόμεναι τέμνονται ἐπὶ τῆς τρίτης περιφερείας (43).

Ἀφ' ἑτέρου, θεωροῦντες τὸ τρίγωνον ΑΣΙ καὶ τὰ τρία σημεῖα Π, Ν, Ε ἐπὶ τῶν πλευρῶν του, εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι ΠΣΝ, ΝΕΙ, ΠΕΑ διέρχονται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ρ· ἑπομένως, ἡ περιφέρεια ΠΛΝ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ρ, τομῆς τῶν περιφερειῶν ΔΕΙ (= ΝΕΙ) καὶ ΑΕΚ (= ΠΕΑ).

Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ΠΛΝΡ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Μ. Ἤτοι τὰ πέντε σημεῖα Λ, Μ, Ν, Ρ, Π εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

737 γ. ***Σημείωσις.*** Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἐλήφθη ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Catalan *Θεωρήματα καὶ Προβλήματα* (6η ἔκδ., 1879, κεφ. XXVII, σελ. 50. Ὁ Paul Terrier ἀκολουθεῖ ἄλλην ὁδὸν (N. A., (1895), σελ. 1*), ἀποδεικνύει ὅτι τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχει καὶ τὸ *ἀστεροειδὲς πεντάγωνον* καὶ γενικεύει τὴν πρότασιν (σελ. 1 - 5). Προγενεστέρως, ὁ Longchamps εἶχε φθάσει εἰς συμπεράσματα πολὺ ἀξιοσημείωτα καὶ γενικώτατα διὰ ἀνάλογα ζητήματα (N. Cor. Math. (1877), σελ. 306 καὶ 340).

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ John Casey εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔργον του *A Sequel of the first six Books of the Elements of Euclid*, 6η ἔκδοσις, n° 42, σελ. 151. Ὁ Kantor (Βιέννη) ἐχρησιμοποίησε τὸν κύκλον τοῦ *πενταγώνου τοῦ Miquel* εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ὑποκυκλοειδοῦς μὲ τρία σημεῖα ἀνακάμψεως (Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques (1879), σελ. 138).

Σχετικὰ πρὸς τὸ ἀνωτέρω θέμα εὑρίσκονται καὶ εἰς Int. d. Math. (1896), σελ. 82, ζήτ. 809.

Πολύγωνα περιγεγραμμένα εἰς περιφέρειαν

738. Εἰς τὰς ἀσκήσεις τὰς σχετικὰς πρὸς πολύγωνα περιγεγραμμένα εἰς περιφέρειαν, γίνεται συχνὴ χρῆσις τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος :

Αἱ ἐφαπτόμεναι πρὸς περιφέρειαν, αἱ ἀγόμεναι ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, εἶναι ἴσαι καὶ ἡ γωνία των ἴση πρὸς τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

Θεώρημα 153

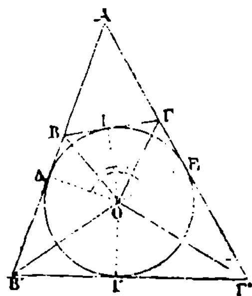
739. Ἐὰν ΑΔ, ΑΕ εἶναι δύο σταθεραὶ ἐφαπτόμεναι μιᾶς περιφερείας (Σχ. 436) καὶ ΒΓ μεταβλητὴ ἐφαπτομένη, κειμένη μεταξὺ τοῦ κέντρου Ο καὶ τοῦ σημείου Α, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει σταθερὰν περίμετρον καὶ ἡ γωνία ΒΟΓ, καθ' ἣν φαίνεται ἐκ τοῦ κέντρου τὸ τμῆμα ΒΓ, εἶναι ἐπίσης σταθερά.

---

43. Σημ. μετ. Πράγματι: $\widehat{ΑΝΣ} = \widehat{ΑΖΙ}$ (= ἐξωτερικὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΖΑΝΙ) $= \widehat{ΑΠΑ} = \widehat{ΑΠΣ}$.

Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μεταβλητὴ ἐφαπτομένη λαμβάνει τὰς θέσεις Β'Γ' τοῦ σχήματος.

1) Ἃς φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΔ, ΟΕ, ΟΙ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἐπειδὴ ΒΙ = ΒΔ καὶ ΓΙ = ΓΕ, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων ΑΔ καὶ ΑΕ, δηλ. πρὸς ποσότητα ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς ΒΓ.



Σχ. 436.

2) Ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΟΙ καὶ ἡ ΟΓ διχοτόμος τῆς γωνίας ΙΟΕ. Ἡ γωνία, ἄρα, ΒΟΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΔΟΕ, ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας Α.

Παρατήρησις. Εἶναι:

$$B\widehat{O}\Gamma + B'\widehat{O}\Gamma' = 180^\circ.$$

Διὰ τὴν ἐφαπτομένην Β'Γ', παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σταθερὰ ποσότης ΑΔ + ΑΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ μήκους τοῦ Β'Γ' ἀπὸ τοῦ μήκους ΑΒ' + ΑΓ'. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν γωνίαν Β'ΟΓ', αὕτη εἶναι ἐπίσης σταθερά, ὡς ἡμιάθροισμα τῶν σταθερῶν γωνιῶν ΔΟΙ' καὶ ΕΟΙ'.

Οὕτω ἀγόμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

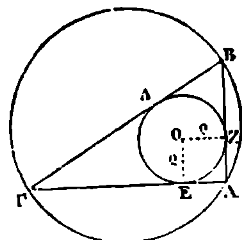
Θεώρημα 153—I

740. Ἐὰν ἓν μεταβλητὸν τρίγωνον μένῃ περιγεγραμμένον εἰς σταθερὰν περιφέρειαν καὶ διατηρῇ μίαν γωνίαν του σταθεράν, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν σταθερὰν γωνίαν, ἠλαττωμένον κατὰ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευράν, εἶναι ποσότης σταθερὰ καὶ ἡ γωνία καθ' ἣν φαίνεται ἐκ τοῦ κέντρου ἡ τελευταία πλευρὰ εἶναι ἐπίσης σταθερά.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ὀφείλεται εἰς τὸν Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*, n° 462 καὶ 463). Ὁ ἐπιφανὴς οὗτος μαθηματικὸς συνήγαγεν μερικὰς ὡραίας ἰδιότητας τῶν κωνικῶν τομῶν ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.
(G., n° 633 Exercices, n° 2110, 2112).

Θεώρημα 154

741. **Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.**



Σχ. 437.

Συνδέοντες τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι τὸ ἄθροισμα β + γ ἰσοῦται πρὸς α + 2ρ ἢ 2R + 2ρ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς β + γ − α.

742. Ἡ ἀκτὶς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύο ἄλλων παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας.

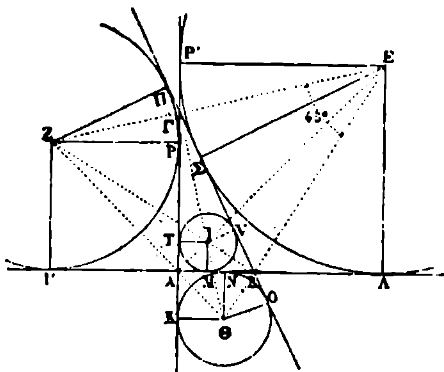
Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (Σχ. 438):

ΕΛ = ΖΡ + ΘΚ + ΙΤ ἢ ΑΛ = ΑΙ′ + ΑΝ + ΑΜ.

Ἀρκεῖ λοιπόν, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος γίνεται φανερόν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΜ = ΝΒ καὶ ΑΙ′ = ΒΛ.

1) Ἐπειδὴ ΑΜ + ΑΝ = ΚΤ, ΒΜ + ΒΝ = ΟV καὶ ΚΤ = ΟV, ἕπεται ΑΜ + ΑΝ = ΒΜ + ΒΝ ἢ ΑΜ = ΒΝ.

2) Τὸ τρίγωνον ΕΒΖ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΒΖ εἶναι ὀρθή, ὡς γωνία τῶν διχοτόμων δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν, καὶ ἡ γωνία ΒΕΖ ἴση πρὸς 45°, ἀφοῦ



Σχ. 438.

αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΕΘ εἶναι διχοτόμοι τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν Ρ′ΕΣ καὶ ΣΕΛ.

Ἑπομένως: ΒΕ = ΒΖ.

Τὰ ὀρθογώνια δὲ τρίγωνα ΒΕΛ καὶ ΒΖΙ′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς ὑποτεινούσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΕΒΛ καὶ ΖΒΙ′ εἶναι ἴσαι ὡς συμπληρωματικαί.

Ὥστε

ΒΛ = ΑΙ′ καὶ ΕΛ ἢ ΑΛ = ΑΝ + ΒΝ + ΒΛ = ΘΝ + ΙΜ + ΖΙ′.

Θεώρημα 154—II

743. **Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὁρίζουν ἐπ᾽ αὐτῶν ἓξ τμήματα ἀνὰ δύο ἴσα. Δείξατε, ὅτι ἂν παραστήσωμεν διὰ τ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν α, β, γ, τὰ μήκη τῶν τμημάτων αὐτῶν εἶναι τ — α, τ — β καὶ τ — γ.**

Πράγματι, διὰ τὸ μῆκος λ. χ. $ΑΛ = λ$ ἔχομεν

$$ΑΛ + ΑΝ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ -$$
$$-(ΛΒ + ΒΜ + ΜΓ + ΓΝ)$$

ἢ $$2λ = 2τ - (2μ + 2ν),$$
$$λ = τ - α.$$

Ἀναλόγως,

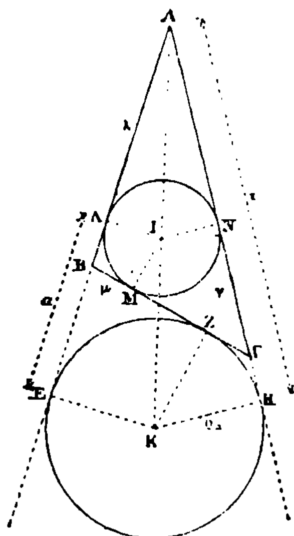
$$μ = τ - β, \quad ν = τ - γ.$$

Παρατήρησις. 1) $ΑΕ = ΑΗ = τ$.

2) $ΛΕ = ΝΗ = α$.

3) $ΒΜ = ΖΓ$, ἐπειδὴ $ΛΕ = ΒΜ + ΒΖ$, καὶ $ΝΗ = ΓΖ + ΓΜ$.

4) $ΖΜ = α - 2μ = β - γ$.



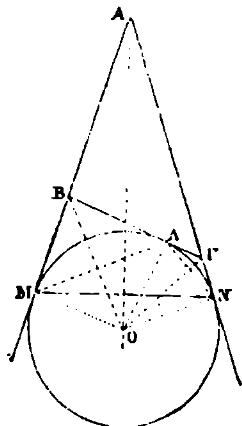
Σχ. 439.

Θεώρημα 154—III

743 α. Ἐὰν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΜ, ΑΝ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΝΑΜ τμηθοῦν ὑπὸ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ κατὰ τρόπον ὥστε $ΒΓ = ΒΜ + ΓΝ$, ἡ περιφέρεια (Ο), ἡ ἐφαπτομένη τῶν ἴσων πλευρῶν εἰς τὰ Μ καὶ Ν, ἐφάπτεται ἐπίσης τῆς εὐθείας ΒΓ.

1η Ἀπόδειξις. Ἄς λάβωμεν $ΒΛ = ΒΜ$ καὶ ἐπομένως $ΛΓ = ΓΝ$. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια ΛΜΝ ἐφάπτεται τῶν τριῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΑΝ καὶ ΒΓ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΛΜΝ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, ἴσον ἀπέχον τῶν τριῶν κορυφῶν του καὶ κοινὸν σημεῖον ἐπίσης τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ΜΑΝ, ΜΒΛ καὶ ΛΓΝ, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ὁμωνύμων ἰσοσκελῶν τριγώνων. Κατ' ἀκολουθίαν, αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΟΛΒ καὶ ΟΛΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας τῶν ἴσων τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΝ. Εἶναι λοιπὸν καὶ αἱ τέσσαρες αὐταὶ γωνίαι ὀρθαὶ καὶ ἡ περιφέρεια ΛΜΝ ἐφάπτεται τῶν ΑΜ, ΑΝ καὶ ΒΓ εὐθειῶν.

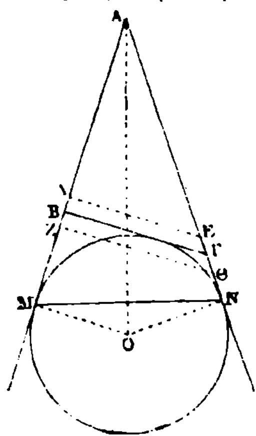


Σχ. 440.

2α Ἀπόδειξις. Διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀλλ' ὀλίγον κομψή:

Ἔστω (Ο) ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐφάπτεται εἰς τὰ Μ,Ν τῶν ΑΜ καὶ ΑΝ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΒΓ δὲν ἦτο ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου, θὰ εἶχε τὴν θέσιν ΔΕ ἢ ΖΘ. Ἔστω ΒΓ

ἐφαπτομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ (ἢ ΖΘ). Εἰς τὴν πρώτην θέσιν θὰ εἴχομεν, ὡς φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος



Σχ. 441

$$ΔΜ + ΕΝ > ΒΜ + ΓΝ = ΒΓ > ΔΕ$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν

$$ΖΜ + ΘΝ < ΒΜ + ΓΝ = ΒΓ < ΖΘ,$$

συμπεράσματα δηλ. ἀντίθετα πρὸς τὰς ὑποθέσεις· ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΒΓ τῆς περιφερείας (Ο).

Θεώρημα τοῦ Pitot 155

744. Εἰς πᾶν περιγεγραμμένον εἰς κύκλον τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἐπειδὴ αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι πρὸς μίαν περιφέρειαν εἶναι ἴσαι.

Σημείωσις. Pitot (1695 — 1771). (Βλ. *Éléments de Topographie* ὑπὸ Edmond Gabriel, σελ. 524, n° 948).

Θεώρημα ἀντίστροφον 156

745. Πᾶν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, εἶναι περιγράψιμον εἰς περιφέρειαν.

1η Ἀπόδειξις. Ἔστω (Ο) ἡ περιφέρεια ἡ ἐφαπτομένη τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΑΔ′ ἡ ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένη αὐτῆς. Ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ′ θὰ ἔχωμεν

$$ΑΒ + ΓΔ' = ΑΔ' + ΒΓ.$$

Ἀλλ' ὑπετέθη

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ,$$

καὶ ἑπομένως

$$ΑΔ' = ΑΔ - ΔΔ',$$

συμπέρασμα ἄτοπον ἐὰν $Δ \neq Δ'$· ἐπειδή, ἄλλως, ἡ πλευρὰ ΔΔ′ τοῦ τριγώνου ΑΔΔ′ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΔ′ αὐτοῦ. Εἶναι λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγράψιμον.

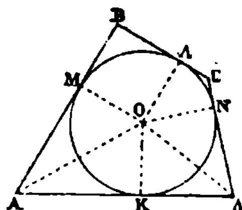
2α Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ (Σχ. 442), τεμνομένας εἰς τὸ Ο, καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν τὴν ἐφαπτομένην τριῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἰς Μ, Κ, Ν. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη ἐφάπτεται καὶ τῆς τετάρτης πλευρᾶς ΒΓ.

Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἓν τμῆμα ΒΛ = ΒΜ, (ἐκ τῆς σχέσεως ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΔ) θὰ ἔχωμεν ΓΛ = ΓΝ καὶ ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (§ 743) ἕπεται ἀμέ-

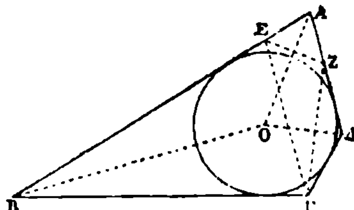
σως, ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΜ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΒΓ.

Ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒ + ΓΔ = ΒΓ + ΔΑ (Σχ. 443) καὶ ΑΒ > ΒΓ.

Θεωρήσωμεν τὰς ἴσας διαφορὰς ΑΒ − ΒΓ = ΑΔ − ΓΔ καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ τμήματα ΑΕ καὶ ΑΖ ἴσα πρὸς τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν διαφορῶν αὐτῶν. Σχηματίζονται οὕτω τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΒΓΕ, ΑΕΖ, ΔΓΖ, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τῶν



Σχ. 442.



Σχ. 443.

γωνιῶν εἰς τὰς κορυφάς των εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΕΖΓ. Συντέμνονται ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰς ἓν σημεῖον Ο, ἴσον ἀπέχον, προφανῶς, τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί, ἐπομένως, κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.—Fricke, Gérard (*Mathesis* (1904), σελ. 13, n° 2 καὶ 67, n° 10).

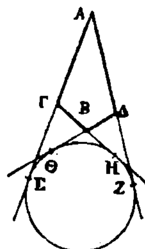
745 α. ***Σημείωσις.*** Εἰς *A. d. Ger.* τόμ. VI, 1815-1816, ὁ J.-B. Durrande ἀποδεικνύει ἀπ' εὐθείας τὴν πρότασιν, καθὼς καὶ τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς διὰ τὸ στρεβλὸν τετράπλευρον ἢ τὸ σφαιρικὸν τοιοῦτον (σελ. 46 τοῦ ΣΤ' τόμου).

Ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων ἕπεται τὸ ἀκόλουθον:

Ἐὰν τέσσαρες κύκλοι ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ μιᾶς σφαίρας ἐφάπτωνται ἀνὰ δύο, τὰ τέσσαρα σημεῖα ἐπαφῆς ἀνήκουσιν εἰς μίαν περιφέρειαν.

Θεώρημα 157

746. Ἐὰν ἡ περιφέρεια, ἡ ἐφαπτομένη τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, εἶναι ἐξωτερικὴ αὐτοῦ, αἱ διαφοραὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσαι (*Steiner, Journal de Crelle*, 1846).



Σχ. 444.

Ἔστω

$$ΑΕ = ΑΖ = α, \quad ΒΘ = ΒΗ = β,$$

$$ΓΕ = ΓΗ = γ, \quad ΔΖ = ΔΘ = δ.$$

Ἐπειδή:

$$ΑΓ = α - γ, \quad ΔΒ = δ - β,$$

$$ΑΔ = α - δ; \quad ΓΒ = γ - β,$$

ἕπεται

$$ΑΓ - ΔΒ = α + β - γ - δ = ΑΔ - ΓΒ.$$

Θεώρημα 158

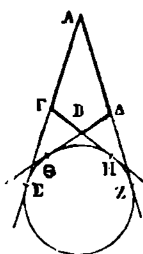
747. Εἰς πᾶν τετράπλευρον παρεγγράψιμον (ὡς τὸ προηγούμενον), τὸ ἄθροισμα δύο τῶν παρακειμένων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἀντιστρόφως· *ἐὰν τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ εἶναι ἴσα, τὸ τετράπλευρον εἶναι παρεγγράψιμον.*

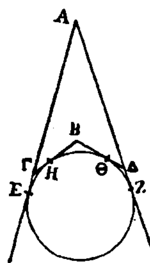
Ἐκ τοῦ σχ. 445 ἔχομεν:

$$ΑΓ + ΓΒ = α - γ + γ - β, \quad ΑΔ + ΔΒ = α - δ + δ - β$$

δηλ.
$$ΑΓ + ΓΒ = ΑΔ + ΔΒ.$$



Σχ. 445.



Σχ. 446.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου εἶναι ὁμοία ἐκείνης τῆς προτάσεως 745.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ διὰ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον (Σχ. 446).

Ἐπειδή, ἐκ τῶν σχέσεων:

$$ΑΓ + ΓΒ = α - γ + γ + β$$
$$ΑΔ + ΔΒ = α - δ + δ + β,$$

λαμβάνομεν:

$$ΑΓ + ΓΒ = ΑΔ + ΔΒ \quad ἢ \quad ΑΓ - ΒΔ = ΑΔ - ΒΓ.$$

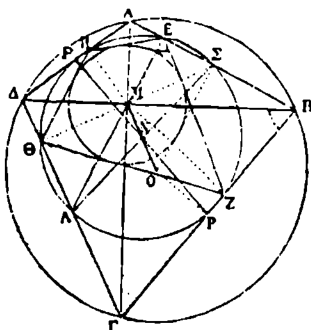
748. *Σημείωσις.* Τὸ *θεώρημα τοῦ Pitot* (§ 745) χρονολογεῖται ἀπὸ τοῦ 1725 καὶ συνεπληρώθη ὑπὸ τοῦ Steiner (*Nouvelles Annales* (1849), σ. 367). Ὁ G. Darboux εἰς τὸ *Bulletin des Sciences Mathématiques* (1879, σ. 64), ἐδημοσίευσε μίαν πλήρη μελέτην σχετικῶς καὶ συνήγαγεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: *Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχῃ δύο κορυφὰς Α καὶ Β σταθερὰς καὶ τὰς Γ καὶ Δ μεταβλητάς, ἀλλ' εἰς τρόπον, ὥστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του νὰ παραμένωσιν ἀμετάβλητα καὶ τοιαῦτα ὥστε τὸ τετράπλευρον νὰ παραμένῃ πάντοτε περιγράψιμον εἰς κύκλον, ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς αὐτὸ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τὸ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου, κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ καθ' ἣν αἱ τέσσαρες κορυφαί του κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

Σχετικὰ εἰς: *Bulletin des Mathématiques Élémentaires* 1895 — 96, σ. 214, n° 65 ὑπὸ Coissard· *Journal de Mathématiques* τοῦ Vuibert, τεῦχος 1ης Νοεμβρ. 1902 ὑπὸ Th. Caronnet.

Θεώρημα 159

749. Ἐὰν ἓν ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ἔχῃ τὰς διαγωνίους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, τὸ τετράπλευρον τῶν προβολῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, ἡ δὲ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς αὐτὸ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράπλευρον, Ο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ΕΘΖΗ τὸ τετράπλευρον τῶν προβολῶν. Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΑΗΜΕ, ΕΒΖΜ κλπ. λαμβάνομεν



Σχ. 417.

$$\widehat{HEM} = \widehat{HAM}, \quad \widehat{ZEM} = \widehat{ZBM}.$$

Ἀλλ' εἶναι $\widehat{HAM} = \widehat{ZBM}$, ἀφοῦ τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς $\frac{1}{2}\ \widehat{\Gamma\Delta}$. Ἑπομένως

$$\widehat{HEM} = \widehat{ZEM},$$

δηλ. ἡ ΕΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΖΕΗ· καὶ ἐπειδὴ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν τὴν ἔχουν κατ' ἀναλογίαν ἀποδείξεως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΜΟ, ΜΗ καὶ ΜΖ, γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΘΗ εἶναι περιγράψιμον εἰς περιφέρειαν.

1) Ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος

$$\widehat{HEZ} + \widehat{H\Theta Z} = 2\,(\widehat{MBZ} + \widehat{M\Gamma Z}).$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΜΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ $\widehat{MBZ} + \widehat{M\Gamma Z} = 1$ ὀρθή· ἄρα $\widehat{HEZ} + \widehat{H\Theta Z} = 2$ ὀρθαὶ καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΘΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2) Ἂς συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Μ μὲ τὸ μέσον Λ τῆς πλευρᾶς ΔΓ καὶ ἂς ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΛ εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΕΜ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΜΔ, ἡ διάμεσος ΛΜ = ΛΓ. Ἑπομένως:

$$\widehat{\Lambda M\Gamma} = \widehat{\Lambda\Gamma M} = \widehat{MBA} = \widehat{EMA}.$$

(Αἱ δύο τελευταῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΜΑΕ).

Αἱ ἴσαι γωνίαι ΛΜΓ καὶ ΑΜΕ ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ προέκτασις τῆς ΜΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΔΓ καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς εὐθείας ΜΗ, ΜΘ, ΜΖ· καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΛΕΣ, ΛΘΣ, κλπ. εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Θ καὶ Η, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς ΛΣ καὶ ΡΡ' ἀντιστοίχως.

Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ

ὁποίου αἱ διαγώνιοι ὑπετέθησαν κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἤτοι αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους τὰ ΛΣ καὶ ΡΡ' ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ τὰ ὀκτὼ σημεῖα — τὰ τέσσαρα μέσα τῶν πλευρῶν καὶ οἱ τέσσαρες πόδες ἐπ' αὐτῶν — ἀνήκουν εἰς τὴν ἰδίαν περιφέρειαν.

Τὸ κέντρον Ν τῆς περιφερείας τῶν *ὀκτὼ σημείων* τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΜΟ καὶ συμπίπτει πρὸς τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν του. (*Mathesis* (1904), σελ. 238, nº 1170 Barisien).

749 α. ***Σημείωσις.*** Τὸ ἀνωτέρω θέμα προετάθη εἰς τὸν *Concours general* τοῦ 1870 διὰ τὰ *Στοιχειώδη μαθηματικὰ* (Ν. Α. (1870), σελ. 383). Εἰς Ν. Α. (1841), σελ. 487 εὑρίσκονται καὶ αἱ ἀκόλουθοι παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ἰδίου ζητήματος: 1) *Ἡ ἀπόστασις μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου* [44] *ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.* 2) *Τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον* ΑΒΓΔ *καὶ τὸ περιγεγραμμένον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν φέροντες τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν* ΑΒΓΔ *καὶ εἰς τὰ* Α, Β, Γ, Δ, *εἶναι τοιαῦτα, ὥστε αἱ τέσσαρες τομαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἥτις εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου* Μ *ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν* ΑΒΓΔ. 3) *Τὸ περιγεγραμμένον τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι τὰ* Α, Β, Γ, Δ, *εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τετράπλευρον* ΕΖΘΗ, *κλπ.*

Ἐκ τῆς δευτέρας παρατηρήσεως προκύπτει ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι μία ειδικὴ περίπτωσις τοῦ *ἁρμονικοῦ τετραπλεύρου* τῆς *Νεωτέρας Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου* καὶ ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ *σημεῖον τοῦ Lemoine* αὐτοῦ. Τίποτε, ἐν τούτοις, δὲν ἀποδεικνύει τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ σημείου αὐτοῦ· εἰς τὰ *Théorèmes et Problèmes de Géométrie* (6η ἔκδ., (1879), σ. 134) τοῦ Catalan, ὁ συγγραφεύς του περιορίζεται εἰς τὸ νὰ διαπιστώσῃ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ δύο ἀπέναντι πλευρῶν, ὡς τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον ὃν καὶ αἱ πλευραὶ αὐταί, ἰδιότης φανερὰ ἐκ τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ΑΜΒ, ΔΜΓ.

Τὸ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ὀνομάζεται πολλάκις καὶ *δικεντρικὸν τετράπλευρον* (*Mathesis* (1904), σελ. 103, nº 1465). Διὰ τὰς ἰδιότητας τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων πρβλ. ἑπομ. (§ 1276), (§ 1277) καὶ (§ 1277 β).

Σχετικὰ εἰς: A. d. Gerg., τόμ. XV, 1824 - 25, σ. 133 Durrande· Int. d. Math., (1902), σ. 100, nº 279, Aubry· *Mathesis* (1902), σ. 173, ζήτμ. 1194, Lemoine· αὐτ. (1906), σ. 14, Neuberg.

Θεώρημα 159—I

749 β. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς περιγραψίμου εἰς κύκλον τετραπλεύρου κατασκευάζομεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ὅμοια. Ἔστωσαν α, β, γ, δ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὑψῶν τῶν ἐξωτερικῶν τριγώνων καὶ α', β', γ', δ' τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα διὰ τὰ ἐσωτερικὰ τρίγωνα.

1) *Αἱ διάμεσοι τῶν δύο τετραπλεύρων* αβγδ, α'β'γ'δ' *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, μέσον ἑκάστης.*

2) *Αἱ διάμεσοι τοῦ τετραπλεύρου* αβγδ *τέμνονται καθέτως.*

---

44. Σημ. μετ. Ἐννοεῖται τοῦ ΑΒΓΔ.

3) *Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ἀποβῇ τρίγωνον, μία ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου γίνεται τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Αἱ δύο προηγούμεναι ἰδιότητες ἐξακολουθοῦν ἰσχύουσαι.*

Ζητεῖται πότε αἱ τρεῖς συνθῆκαι πληροῦνται. (N. A. (1872), σ. 480, n° 1099, H. Brocard).

Λύσις ὑπὸ Moret-Blanc, 1878, σ. 40.

Τὸ πρῶτον μέρος δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς : *Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τυχόντος τετραπλεύρου κατασκευάζομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν καὶ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ, τρίγωνα ἰσοσκελῆ ὅμοια καὶ ἔχοντα ὡς κορυφὰς τὰ σημεῖα* Α, Β, Γ, Δ *καὶ* Α', Β', Γ', Δ'. *Αἱ διάμεσοι τῶν δύο τετραπλεύρων* ΑΒΓΔ *καὶ* Α'Β'Γ'Δ' *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Μ.

Θεώρημα 160

760. Διὰ τοῦ κέντρου ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΧΥ· δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, τῶν κειμένων πρὸς τὸ ἓν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα διὰ τὰς κορυφὰς τὰς κειμένας πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

1) Ἡ πρότασις εἶναι φανερὰ διὰ πολύγωνον ἀρτίου πλήθους πλευρῶν.

2) Ἔστω ὅτι τὸ πολύγωνον ἔχει περιττοῦ πλήθους πλευράς, τρεῖς ἐπὶ παραδείγματι, καὶ ἄς θεωρήσωμεν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, καθὼς καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Οὕτω σχηματίζεται ἓν κανονικὸν πολύγωνον, καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον.

Ἄς συμβολίσωμεν τὴν ἀπόστασιν ἑκάστης κορυφῆς ἀπὸ τῆς εὐθείας διὰ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν μικροῦ γράμματος. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ΑΛ = ΒΜ + ΓΝ ἢ $\alpha = \beta + \gamma$.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου ἑνὸς τμήματος ἀπὸ τινος εὐθείας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ἀπ' αὐτῆς (§ 436), θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\alpha = \frac{\delta + \iota}{2}, \quad \beta = \frac{\zeta - \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{\eta + \theta}{2}$$

$$\beta + \gamma = \frac{\zeta + \theta + \eta - \varepsilon}{2} = \frac{\zeta + \theta}{2}.$$

Ἀλλ' εἶναι (1ον) $\eta = \varepsilon$, $\zeta = \iota$, $\delta = \theta$· ἑπομένως

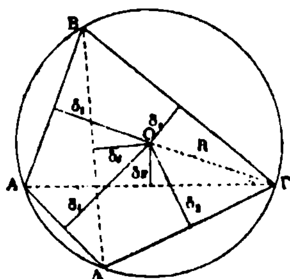
$$\beta + \gamma = \frac{\delta + \gamma}{2} = \alpha \cdot \quad \text{ἢ} \quad ΑΛ = ΒΜ + ΓΝ.$$

Παρατηρήσεις. 1) Θὰ ἔχωμεν ἐπίσης: ΟΜ = ΟΛ + ΟΝ, ἐὰν προβάλωμεν ἐπὶ ἄξονος παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΛ.

2) Τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου.

Ἰαπωνικὸν Θεώρημα 160—I

750 α. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ διαχωρίζει τὸ τετράπλευρον ἡ μία διαγώνιος, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα διὰ τὰ τρίγωνα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς ἄλλης διαγωνίου.



Σχ. 448 β.

Ἔστωσαν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ καὶ $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$, αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐνδιαφέρουσαν *Παρατήρησιν* τῆς § 737, εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

$$R + \rho_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_5$$

$$R + \rho_3 = \delta_3 + \delta_4 - \delta_5,$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

$$\rho_1 + \rho_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 - 2R.$$

Ἀναλόγως, ἔχομεν:

$$\rho_2 + \rho_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 - 2R.$$

Ἐπομένως:

$$\rho_1 + \rho_3 = \rho_2 + \rho_4.$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει δι' ἓν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον μὲ οἱονδήποτε πλῆθος πλευρῶν.

750 β. ***Σημείωσις.*** 1) Τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπετέθη κατ' ἀρχὰς ὅτι εἶχε προέλευσιν ἐκ Κίνας (*Mathesis*, (1905), σ. 268, n° 26, *Y. Mikami*, Τόκιο) ἀλλ' ἀργότερον ἀπεδείχθη ἡ Ἰαπωνική του «ἰθαγένεια» (*Mathesis*, (1906), σ. σ. 257 - 260, *T. Kayashi*, Τόκιο).

2) Τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων περιφερειῶν εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου (§ 710, β).

Εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου

751. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εὐθεῖαι περισσότεραι τῶν δύο διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, χρησιμοποιοῦμεν τὰς παρατηρήσεις τῶν §§ 439 καὶ ἑπομ. Διάφοραι, ἐπίσης, προτάσεις τοῦ ΙΙ Βιβλίου παρέχουν νέους ἀποδεικτικοὺς τρόπους. (Ἀσκ. 163 - 164, §§ 757, 758).

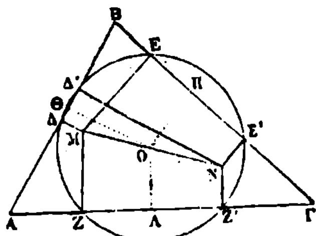
Θεώρημα 161

752. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι καὶ ἐκ τυχόντος σημείου Μ φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτάς. Δείξατε, ὅτι ἡ περιφέρεια ἥτις διέρχεται διὰ τῶν

τριῶν ποδῶν τέμνει τὰς εὐθείας εἰς τρία ἄλλα σημεῖα, ἅτινα εἶναι ἐπίσης προβολαὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἑνὸς σημείου Ν.

Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ οἱ πόδες καὶ Δ', Ε', Ζ' τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς περιφερείας ΔΕΖ καὶ τῆς ὁποίας κέντρον ἔστω τὸ Ο.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΟ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της τμῆμα ΟΝ = ΟΜ. Ἡ εὐθεῖα ΝΖ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἀφοῦ ΛΖ' = ΛΖ, καί, ἑπομένως, ἡ ΝΖ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΜΖ· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν ΜΔ, ΝΔ' καὶ ΜΕ, ΜΕ'. Ὥστε . . .



Σχ. 449.

Παρατήρησις. Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὰς ὁποίας μία περιφέρεια τέμνει εἰς Α, Α'. . ., ἐὰν τὰ Α, Β . . . εἶναι προβολαὶ ἑνὸς σημείου Μ καὶ τὰ Α', Β'. . . θὰ εἶναι προβολαὶ ἑνὸς σημείου Ν.

Θεώρημα 161—I

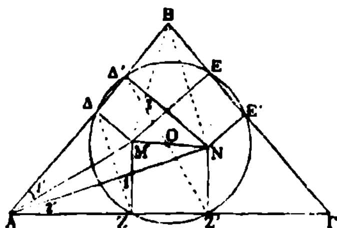
753. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΝ (Σχ. 449 καὶ 450) εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καθὼς καὶ αἱ ΒΜ, ΒΝ καὶ ΓΜ, ΓΝ πρὸς τὰς ΒΑ, ΒΓ καὶ ΓΑ, ΓΒ ἀντιστοίχως.

Τὰ τετράπλευρα ΑΔΜΖ καὶ ΑΔ'ΝΖ' εἶναι ἐγγράψιμα· ἄρα

$$\widehat{1} = \widehat{1'} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{2} = \widehat{2'}.$$

Τὰ ἴδια τετράπλευρα εἶναι καὶ ὅμοια, ἐπειδὴ εἶναι ἰσογώνια καὶ συμβαίνει

$$\frac{ΑΔ}{ΑΖ} = \frac{ΑΖ'}{ΑΔ'}.$$



Σχ. 450

ἄρα $\widehat{1}=\widehat{2}$, ἑπομένως $\widehat{1'}=\widehat{2'}$ καὶ καθ' ὁμοίαν ἀπόδειξιν $Α\widehat{Β}Μ=Γ\widehat{Β}Ν$, $Α\widehat{Γ}Μ = Β\widehat{Γ}Ν$.

Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΝ κλπ. ὀνομάζονται *ἰσογώνιοι*, τὰ δὲ σημεῖα Μ, Ν *ἰσογώνια*. (Βλ. ἑπομ. §§ 1118 α, 1344 α καὶ 2307).

Θεώρημα 162

754. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ συνδέομεν τὰς ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κορυφάς των μετὰ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου· δείξατε, ὅτι αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1) Τὰ τρίγωνα ΑΓΖ καὶ ΑΒΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γω-

νίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν· ἐπειδὴ $\widehat{ZA\Gamma} = \widehat{BAE}$, ΑΓ = ΑΕ καὶ ΑΖ = ΑΒ. Ἑπομένως ΓΖ = ΒΕ καὶ ΓΖ = ΑΔ.

2) Αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ, ΑΓΕ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, τοιοῦτον ὥστε αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ πρὸς 120° ἑκάστη, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν Ζ καὶ Ε, ἴσης πρὸς 60° ἑκάστης· ἡ γωνία, ἄρα, ΒΘΓ εἶναι ἐπίσης ἴση πρὸς 120° καὶ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ ἰδίου σημείου Ο.

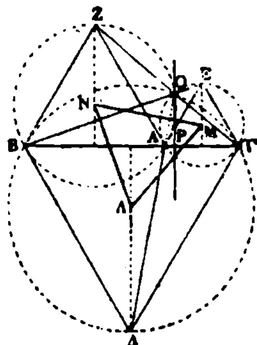
Σχ. 451.

Ἄς συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰς ἓξ κορυφάς· διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΖ καὶ ΟΓ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη γωνία περὶ τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἴση πρὸς 60° — ἀφοῦ ἕκαστον τῶν τόξων, ὡς λ. χ. τὸ $\widehat{BZ}$ εἶναι τὸ τρίτον περιφερείας — καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΒΟΖ, ΒΟΔ καὶ ΓΟΔ εἶναι 180°. Ἄρα, αἱ ΟΖ καὶ ΟΓ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν

Παρατηρήσεις. 1) Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Ο ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

2) Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἐὰν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ἔχουν τὰς τρίτας κορυφάς των πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

3) Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἀληθεύῃ καὶ ἐὰν ἀντὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων κατασκευασθοῦν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου τρίγωνα ὅμοια (πρὸς τὸ ΑΒΓ) καὶ τοιαῦτα, ὥστε αἱ γωνίαι αὐτῶν εἰς τὴν κορυφὴν Α νὰ ἰσοῦνται πρὸς τὴν γωνίαν Γ, αἱ εἰς τὴν κορυφὴν Γ πρὸς τὴν Β, καὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν Β πρὸς τὴν Α. (J.-M. De Bourget, (1879), σ. 58).



Σχ. 451 β

754 α. *Εἰδικὴ περίπτωσις.* Αἱ τρεῖς κορυφαὶ Α, Β, Γ δύνανται νὰ κεῖνται καὶ ἐπ' εὐθείας (Σχ. 451 β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν:

$\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} = 60°$, $\widehat{BO\Gamma} = 120°$· ἀλλὰ καὶ πάλιν ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ.

Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι κορυφαὶ ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀλλὰ τῶν ὁποίων ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία εἶναι τυχοῦσα, ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ὡς θὰ δειχθῇ ἀργότερον (§ 1140α), αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ κέντρα Λ, Μ, Ν τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ἀποτελοῦν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν (§ 754).

755. Σημείωσις. 1) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ὠνομάσθησαν ὑπὸ τοῦ Neuberg *κύκλοι τοῦ Torricelli.*

Εἰς τὴν νέαν ὁρολογίαν διὰ τὸ τρίγωνον, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου κατασκευαζόμενα ἰσόπλευρα τρίγωνα συμβολίζεται διὰ τοῦ z καὶ διὰ τοῦ z' τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον διὰ τὰ ἐσωτερικὰ τρίγωνα. Τὰ σημεῖα z καὶ z' καλοῦνται καὶ *ἰσογώνια κέντρα* τοῦ τριγώνου.

Τὸ σημεῖον z εἶναι τὸ σημεῖον, δι' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου γίνεται ἐλάχιστον. Ἡ ἀνεύρεσις αὐτοῦ εἶχεν προταθεῖ ὑπὸ τοῦ Fermat εἰς τὸν Torricelli, ὅστις καὶ ἔδωσεν πολλὰς λύσεις τοῦ προβλήματος. (*Mathesis*, (1889), σ. 173, παραπομπή· αὐτ. (1899), σ. 131 : *Γενίκευσις ἑνὸς κλασικοῦ προβλήματος ἐλαχίστου*).

2) Τὸ ζήτημα (§ 754) ἐξητάσθη ὑπὸ τοῦ Lamé εἰς τὸ ἔργον του *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les probèlmes de Géométrie*, σ. 82. Ὁ Boutin ἀνέφερε περὶ *ἰσογωνίων κέντρων* εἰς διάφορα ἄρθρα του εἰς J. M. E. τοῦ Longchamps, (1889), σ. 99 κλπ.

Θεώρημα 162—I

756. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν κορυφῶν $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν του. (E. Lemoine).

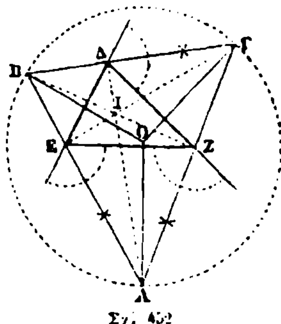
Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ $Α_1,Β_1,Γ_1$ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $Α_1Β_1Γ_2$, $Α_1Γ_1Β_2$ καὶ $Β_1Γ_1Α_2$· τὰ μέσα τῶν τμημάτων $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$ εἶναι αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. (Kiepert).

Παρατήρησις. Ἐὰν α, β, γ εἶναι τὰ κέντρα τῶν ἐξωτερικῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ α', β', γ' τὰ κέντρα τῶν ἐσωτερικῶν, τὰ τρίγωνα αβγ καὶ α'β'γ' εἶναι ἰσόπλευρα. (Lionnet).

Σημείωσις. Βλ. σχετικὰ εἰς : *N. A. Mathématiques* (1869), σ. 40, 528· Int. d. Math., (1902), σ. 332, n° 2422· Mathesis, (1889), σ. 173 καὶ (1899), σ. 131.

Θεώρημα 163

757. Αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τρίγωνον κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 402

Ἔστω ΔΕΖ τὸ δοθὲν τρίγωνον. Τὸ ποδικὸν [*ὀρθικὸν* εἰς τὸ κείμενον· ἀλλ' ἡμεῖς λέγομεν πλέον *ποδικὸν*] τρίγωνον ΔΕΖ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχει ὡς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του τὰ ὕψη καὶ ὡς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (§ 662). Ἐπομένως, διὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἶναι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκτῖνες τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, αἱ καταλήγουσαι εἰς τὰς κορυφάς του, εἶναι κάθετοι

ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ τοῦ ποδικοῦ του τριγώνου (§ 663), ἕπεται, ὅτι αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κέντρων Α, Β, Γ τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὸ ΔΕΖ δὲν εἶναι ἄλλαι παρὰ αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ΑΒΓ. Τέμνονται λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἴσον ἀπέχον τῶν τριῶν κέντρων.

757 α. ***Σημείωσις.*** 1) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ τοιαῦτα, ὥστε αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ ἑνὸς κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὠνομάσθησαν *ὀρθολογικὰ* (orthologiques) (J. M. S., (1889), σ. 63) καὶ ἐμελετήθησαν κυρίως ὑπὸ τοῦ Lemoine. Αἱ ἔρευναι τοῦ μαθηματικοῦ τούτου, πρωτίστως, ἐπὶ ὡρισμένων θεμάτων τῆς Γεωμετρίας ἔδωσαν ἀφορμὴν ἀργότερον εἰς τὴν γένεσιν τῆς *Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου*. (A. F., (1890), σ. σ. 111 - 146).

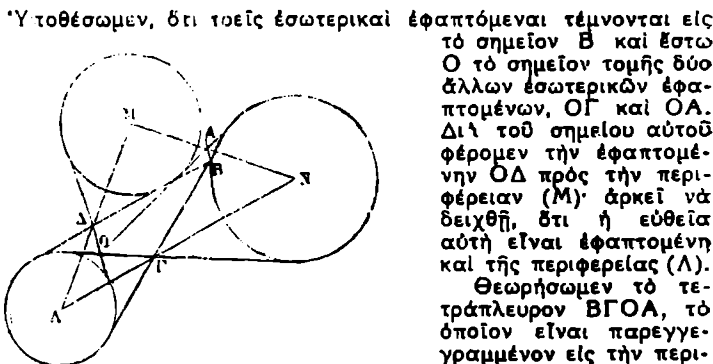
2) *Παραλληλογικὰ (parallélogiques) τρίγωνα.* Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι τοιαῦτα, ὥστε αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' νὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον Ρ καὶ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν Α', Β', Γ' παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ νὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον Ρ' ταῦτα ὀνομάζονται παραλληλογικά. Ἐμελετήθησαν ὑπὸ τῶν J. Neuberg (*Mathesis*, (1882), σ. 144, ζτμ. 150 καὶ (1883), σ. 86) καὶ Ripert (A. F., (1901). Ajaccio, σ. 91).

3) Τὰ *ὀρθολογικὰ* καὶ *παραλληλογικὰ* τρίγωνα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τῶν *ἰσογονολογικῶν (Isogonologiques)* τριγώνων τοῦ Duran - Loriga (A. F. (1902), Montauban, σ. σ. 157 - 165).

Θεώρημα 164

758. Τρεῖς περιφέρειαι (Λ), (Μ), (Ν) εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Δείξατε, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν αὐτῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο, διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ ἄλλαι τρεῖς ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι διέρχονται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Manheim.—N. A. (1864), σ. 210).

Ὑποθέσωμεν, ὅτι τρεῖς ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς δύο ἄλλων ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων, ΟΓ καὶ ΟΑ. Διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΟΔ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Μ)· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἐφαπτομένη καὶ τῆς περιφερείας (Λ).



Σχ. 453.

Θεωρήσωμεν τὸ τετράπλευρον ΒΓΟΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (Ν)· κατὰ τὴν § 747, τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπομένως:

$$ΒΓ + ΓΟ = ΒΑ + ΑΟ.$$

Ἀλλὰ καὶ τὸ ΒΔΟΑ τετράπλευρον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (Μ)· ἄρα:

ΒΑ + ΑΟ = ΟΔ + ΒΔ.

Ἐκ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἰσοτήτων λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

ΒΓ + ΓΟ = ΟΔ + ΒΔ,

ἥτις δεικνύει ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΓΟΔ εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια δὲ αὕτη εἶναι ἡ (Λ), ἀφοῦ τρεῖς ἐκ τῶν πλευρῶν του ἐφάπτονται αὐτῆς. Ὥστε...

Θεώρημα 164—I

758 α. Ἐὰν μία ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν (Λ) καὶ (Μ), μία ἐξωτερικὴ τῶν (Μ) καὶ (Ν) καὶ μία ἐξωτερικὴ τῶν (Ν) καὶ (Λ) ἔχουν κοινὸν σημεῖον, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ διὰ τὴν ἄλλην ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην τῶν (Λ) καὶ (Μ) καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας τῶν (Μ) καὶ (Ν) καὶ τῶν (Ν) καὶ (Λ) περιφερειῶν.

Ἀπόδειξις ὡς ἡ προηγουμένη.

Θεώρημα 164—II

759. Αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ποδικοῦ ἑνὸς δοθέντος τριγώνου κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς αὐτοῦ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Edouard Lucas, N. C. M., (1876), σ. 218).

Θεώρημα 164—III

759 α. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΟΥ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΟΒΓ μὲ σταθερὰν περίμετρον 4τ, αἱ κάθετοι ΓΖ, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Γ ἐπὶ τὰς διαγωνίους ΑΒ, διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου Δ. (Breton de Champ).

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Δ λαμβάνοντες ἐπὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ ἴσα μήκη ΟΑ′=ΟΒ′=2τ καὶ κατασκευάζοντες τὸ τετράγωνον ΟΑ′ΔΒ′. Ἡ σχέσις ΟΑ + ΟΒ = 2τ, δεικνύει ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ περιβάλλει μίαν παραβολήν, ἐφαπτομένην τῶν ἀξόνων ΟΧ, ΟΥ εἰς τὰ Α′ καὶ Β′. (J. Neuberg· *Mathesis*, (1901), σ. 226, n° 21).

Σημεῖα ἐπ' εὐθείας

760. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τρία σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἐργαζόμεθα συνήθως ὡς ἑξῆς:

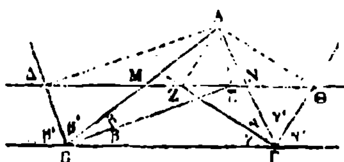
Συνδέομεν δι' εὐθειῶν ἓν ἐκ τῶν σημείων μετὰ τῶν δύο ἄλλων καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ἔχουν κοινὴν διεύθυνσιν, εἴτε διαπιστοῦντες τὴν παραλληλίαν των πρὸς μίαν τρίτην εὐθεῖαν, εἴτε ἀποδεικνύοντες, ὅτι σχηματίζουν μετὰ μιᾶς εὐθείας, ἀγομένης διὰ τοῦ κοινοῦ των σημείου, γωνίας κατὰ κορυφὴν ἴσας.

Παρὰ τὴν φαινομενικὴν διαφορὰν τῶν δύο ζητημάτων, εὐκόλως ἀναγνωρίζεται ἡ ἀναλογία τῆς μεθόδου ἀποδείξεως τῆς συγγραμικότητος τριῶν σημείων πρὸς τὴν μέθοδον δι' ἧς ἀποδεικνύομεν ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Αἱ νεώτεραι γεωμετρικαὶ μέθοδοι εἶναι ἐνήμεροι τῆς ἀναλογίας αὐτῆς καὶ θεωροῦν τὰ δύο προβλήματα *ἐναλλακτά*.

Θεώρημα 165

761. Αἱ προβολαὶ μιᾶς κορυφῆς τριγώνου ἐπὶ τῶν τεσσάρων διχοτόμων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. (A. Lascases, N. A. (1859), σ. 171, n° 477).

Ἔστωσαν ΑΕ, ΑΔ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν εἰς τὸ Β. Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι ΒΔ, ΒΕ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΕ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἑπομένως, ἡ διαγώνιος ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ εἶναι ΜΕ = ΜΒ, καθὼς καὶ



Σχ. 401.

$$M\widehat{E}B = M\widehat{B}E = \Gamma\widehat{B}E.$$

Εἶναι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΜΕ καὶ ΒΓ παράλληλοι καὶ ἡ ΜΕ διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ μέσου τῆς δευτέρας πλευρᾶς ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ κ.ὁ.ἁ. καὶ ἡ ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διέρχεται ὁμοίως διὰ τοῦ σημείου Ν, γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ αἱ προβολαὶ Ζ, Θ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Ζ', Θ' τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αἱ προεκτάσεις τῶν ΑΖ καὶ ΑΘ συναντοῦν τὴν ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν

$$AZ = ZZ', \quad A\Theta = \Theta\Theta'\cdot$$

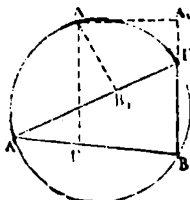
δηλ. ἡ ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ κλπ.

Θεώρημα τοῦ Simson 166

762. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, λαμβάνομεν τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Αἱ προβολαὶ ἑνὸς τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.



Σχ. 402.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται *εὐθεῖα τοῦ Simson.*

1η Ἀπόδειξις. (Βλ. *Μέθοδοι*, § 22).

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Baltzer εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἐξεθέσαμεν εἰς τὰς μεθόδους. Ἵνα ὅμως δώσωμεν ἓν ὑπόδειγμα γεωμετρικῆς λακωνικότητος, ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ συγγραφέως τούτου. (Planimétrie, § IV, 3):

«Ἐὰν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας καὶ φέρωμεν τὰς καθέτους ΔA_1, ΔB_1, $\Delta\Gamma_1$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, οἱ πόδες A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

«Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ, Δ καὶ A_1, B, $Γ_1$, Δ εὑρίσκονται, ἀντιστοίχως, ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, ἔχομεν:

$$2Δ\widehat{A_1}B_1 = 2Δ\widehat{Γ}B_1 = 2Δ\widehat{Γ}A = 2Δ\widehat{B}A = 2Δ\widehat{B}Γ_1 = 2Δ\widehat{A_1}Γ_1.$$

«Κατ' ἀκολουθίαν, θὰ ἔχωμεν $2Δ\widehat{A_1}B_1 = 2Δ\widehat{A_1}Γ_1$· ἑπομένως, τὰ σημεῖα A_1, B_1, $Γ_1$ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας».

763. 2α Ἀπόδειξις (Retsin). Προεκτείνομεν τὴν ΡΕ μέχρι τῆς περιφερείας καὶ φέρομεν τὴν ΒΘ. Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΔΕ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΘ (§ 760).

Εἰς τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΔΡΕ, αἱ γωνίαι ΔΕΡ καὶ ΔΑΡ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μέτρον.

Ἀλλὰ

$$Δ\widehat{A}P = Λ\widehat{Θ}P = \frac{1}{2}\,\widehat{BAP}.$$

Ἑπομένως

$$Δ\widehat{E}P = Λ\widehat{Θ}P.$$

καὶ

$$P\widehat{E}Z = 180^\circ - P\widehat{Γ}Z,$$

Σχ. 456.

ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον ΡΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμον. Καὶ ἐπειδὴ

$$P\widehat{Γ}Z = \frac{1}{2}\,\widehat{BAP} = Λ\widehat{Θ}P,$$

ἕπεται

$$P\widehat{E}Z = P\widehat{Θ}B,$$

δηλ. τὰ τμήματα ΕΔ, ΕΖ, ὄντα παράλληλα πρὸς τὴν ΒΘ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

764. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποδίδεται ὑπὸ τοῦ Servois εἰς τὸν Simson (*A. d. Gerg.*, τόμ. IV, 1813 - 14, σ. 251) ἐνῷ τὸ *Int. d. Math.* ((1894), σ. 174, n° 136) τὸ ἀνάγει εἰς τὸν *Wallace*, περὶ τὸ 1799 ἢ 1800. Εἰς οἱονδήποτε καὶ ἂν ἀνήκῃ ἡ πρότασις, δὲν εἶναι αὕτη παρὰ εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς λίαν σημαντικοῦ θεωρήματος, ἀλλὰ τοῦ ὁποίου θὰ περιορισθῶμεν νὰ ἀναφέρωμεν μόνον τὴν ἐκφώνησιν καὶ νὰ ὑποδείξωμεν τὰ κυριώτερα πορίσματα:

Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου καὶ συνδέομεν ἀνὰ δύο τοὺς πόδας τῶν καθέτων αὐτῶν (Σχ. 457). *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ, τῶν τοιούτων, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου ΔΕΖ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμήν, εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον.*

Σχ. 457.

1) Διὰ τὸ κέντρον Ο τῆς περιγενοαμμένης περιφερείας, τὸ ἐμ-

βαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου τριγώνου ΙΗΚ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{ΑΒΓ}{4} = \frac{E}{4}$· ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν πλευρῶν του εἶναι τὸ ἥμισυ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ.

2) Ὅταν ἡ ἀπόστασις ΟΜ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι

$$R = OA = OB = OΓ,$$

τὸ ἐμβαδὸν Ε ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{E}{4}$ μέχρι τοῦ 0. Ὥστε:

Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ *διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἐμβαδὸν* Ε *μηδενίζεται.* Πράγματι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Simson, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τρεῖς κορυφαὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

3) Ὅταν ἡ ἀπόστασις ΟΜ ἀπὸ τῆς τιμῆς R αὐξάνη εἰς ἄπειρον, τὸ ἐμβαδὸν Ε αὐξάνει καὶ αὐτὸ ἀπὸ τοῦ μηδενὸς εἰς ἄπειρον.

4) Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ μεταξὺ 0 καὶ $\frac{E}{4}$, ὁ τόπος τῶν σημείων Μ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο περιφερείας· μίαν ἐσωτερικὴν καὶ τὴν ἄλλην ἐξωτερικὴν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον. Αἱ ἀκτῖνες των R_1, R_2, συνδέονται πρὸς τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου διὰ τῆς σχέσεως

$$R_1^2 + R_2^2 = 2R^2.$$

Τὸ σχετικὸν πρὸς τὸ τρίγωνον θεώρημα εἶναι καὶ τοῦτο εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου:

Ἔστω τυχὸν πολύγωνον καὶ Μ *σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐκ τοῦ* Μ *φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (ἢ εὐθείας ἴσον κεκλιμένας πρὸς ἑκάστην πλευρὰν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν = ἰσοκλινεῖς εὐθείας)* (§ 2458).

Τὸ πολύγωνον μὲ κορυφὰς τὰς προβολὰς τοῦ σημείου Μ *ἐπὶ τὰς πλευράς, ἔχει ἓν ὡρισμένον ἐμβαδὸν καὶ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων* Μ, *διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ ἔχει μίαν δοθεῖσαν τιμήν, εἶναι περιφέρεια κύκλου.*

Ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ μεταβάλλεται, οἱ ἀντίστοιχοι τόποι τῶν σημείων Μ *εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι.* (*Revue des sociétés savantes*, τόμ. V, (1870), σ. 203. *Etude d'un lieu géométrique*, ὑπὸ Combette).

Μία κομψοτάτη ἀναλυτικὴ σπουδὴ τοῦ θέματος εὑρίσκεται εἰς τὰ *Leçons de Géométrie Analytique*, ὑπὸ Briot καὶ Bouquet, 13η ἔκδοσις, n° 113. Τὸ ἴδιον ζήτημα ἐξετάζεται καὶ εἰς *Nouv. Annales* (1875), σ. 450, ζτμ. 1174.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐξηγγέλθη ὑπὸ τοῦ Steiner εἰς τὰ *An. d. Gerg.*, τόμ. XIV, 1823 - 24 καὶ ἀπεδείχθη εἰς τὸν αὐτὸν τόμον ὑπὸ τοῦ Querret (1783 - 1839), σ. 280, καὶ Sturm (Γενεύη), σ. 286.

Θεώρημα 168

765. Ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἴσα τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον Ρ (Σχ. 456) μετὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔστω Η ἡ τομὴ τῶν ὕψων ΑΚ καὶ ΒΣ· θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΡΗ (Σχ. 456). Πρὸς τοῦτο, προεκτείνομεν τὸ ὕψος ΒΣ μέχρι τοῦ Μ καὶ λαμβάνομεν ΕΝ = ΕΡ. Ἐπειδὴ ΣΜ = ΣΗ (§ 292, γ), τὸ τραπέζιον ΝΗΜΡ

εἶναι ἰσοσκελές, καθὼς καὶ τὸ ΘΒΜΡ· ἐπομένως, ἡ εὐθεῖα ΝΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ, ἄρα καὶ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΝΗ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ε, μέσου τῆς ΡΝ, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΡΗ.

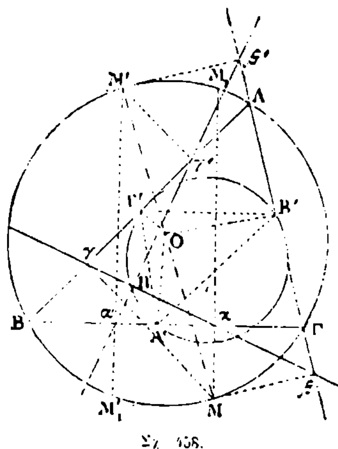
Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ἀνήκει εἰς τὸν Steiner (κατὰ τὸν J. Neuberg).

Θεώρημα 167—I

765 α. 1) Αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson, αἱ σχετικαὶ πρὸς δύο σημεῖα ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα τῆς περιγεγραμμένης εἰς δοθὲν τρίγωνον περιφερείας, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

2) Ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εὐθειῶν τοῦ Simson εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Ἔστω ΜΟΜ′ μία διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας, αβγ, α′β′γ′, αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εὐθεῖαι τοῦ Simson καὶ Α′Β′Γ′ ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου.



Σχ. 408.

1) Α′ εἶναι τὸ μέσον τῆς αα′, ὡς προβολὴ τοῦ μέσου Ο τῆς ΜΜ′, καὶ ὁμοίως τὰ Β′, Γ′ εἶναι μέσα τῶν ββ′ καὶ γγ′.

Ὥστε

$$\widehat{\Gamma M} = \widehat{BM_1'}$$

καὶ

$$\widehat{\Gamma M_1 M} = \widehat{BM'M_1'} = \widehat{\Gamma B M}.$$

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΜαγΒ εἶναι ἐγγράψιμον, ἡ γωνία Μγα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΜ· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τετράπλευρον Μ′γ′α′Β. Ὥστε

$$\widehat{B\gamma'\alpha'} = \widehat{\beta'\gamma'A} = \widehat{BM'M_1'}, \quad \text{ἄρα } M\gamma\alpha = \beta'\gamma'A.$$

Ἀφ' ἑτέρου, αἱ γωνίαι γΜβ καὶ γ′Αβ′ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῆς ΒΑΓ καὶ τὰ γΜβ καὶ γ′Αβ′ τρίγωνα ἰσογώνια· καὶ ἐπειδὴ αἱ Μβ καὶ Μγ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς Αβ′ καὶ Αγ′, ἀντιστοίχως, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς τρίτας πλευράς, βγ καὶ β′γ′. Ἤτοι, αἱ εὐθεῖαι αβγ καὶ α′β′γ′ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

2) Τὰ τρίγωνα αΗα′, βΗβ′ εἶναι ὀρθογώνια· ἄρα

$$HA' = \frac{\alpha\alpha'}{2} = A'\alpha, \quad HB' = \frac{\beta\beta'}{2} = \beta B'$$

καὶ ἐπομένως

$$\widehat{A'H\alpha} = \widehat{A'\alpha H} = \widehat{\Gamma\alpha\beta}, \quad \widehat{B'H\beta} = \widehat{H\beta B'} = \widehat{\Gamma\beta\alpha}.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας σχέσεις, λαμβάνομεν

$$A'\widehat{H}B' = A\widehat{\Gamma}B = A'\widehat{\Gamma'}B'.$$

Ἤτοι: ὁ τόπος τοῦ σημείου Η εἶναι τὸ τόξον Α'Γ'Β' τῆς *περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων*. (Coffart, N. A. (1883), σ. 479 καὶ (1884), σ. 397· Lemoine, Jour. d. M. E., (1883), σ. 246, X· Weill, J. M. S. (1884), σ. 15, th. IX).

Παρατήρησις. Δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι τοῦ Simson εἶναι ἀντίστροφοι εὐθεῖαι τοῦ Longchamps· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι διαμετρικά, καὶ ἔχομεν Βα' = Γα, Γβ = Αβ' καὶ Αγ' = Βγ.

765 β. Σημείωσις. Τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 765 α), δύναται νὰ συμπληρωθῇ ὡς ἑξῆς:

3) Αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰς ἄκρα τῆς διαμέτρου ΟΙ, τῆς διερχομένης διὰ τῶν κέντρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον τοῦ Feurbach (σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων).

4) Ἐὰν προβάλλωμεν ἓν τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς ΟΙ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, ἡ περιφέρεια ΚΛΜ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ Feurbach (G. Alizi *Journal de Vuibert,* (1910), σ. 126 καὶ N. A. (1904), σ. 400, T. Lemoine). Βλ. ἐπμ. § 1242 π, 5 καὶ 6.

Τὸ θεώρημα 765 α, 2) εὑρίσκεται ἐπίσης εἰς τὰ *Esercitazioni di Geometria sulla circonferenzo di Eulero* (1909), σ. 4, *Estrado dal Pitagora,* an XVI, n. 1-5). Ὡραιοτάτη στοιχειώδης σπουδὴ ὑπὸ *Cristoforo* Alasia, συγγραφέως τῆς *La Recente Geometrie del Triangolo* (1900).

Θεώρημα 167—II

765 γ. Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson πρὸς αὐτά, αἱ σχετικαὶ πρὸς τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τέμνονται κατὰ σταθερὰν γωνίαν. (Droz - Farny).

Σημείωσις. 1) Βλ. *Mathesis,* (1901), σ. 104, ζτμ. 1090 καθὼς καὶ ἐπμ. § 2161 (β). Τὸ θεώρημα συνεπληρώθη ὑπὸ τοῦ S. Cantor καὶ ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Absolonne (*Mathesis* (1906), σ. 144 ζτμ. 1575 καὶ 1907, σ. 23).

2) Μία ὡραία στοιχειώδης σπουδὴ ἐπὶ τῆς *εὐθείας τοῦ Simson* εὑρίσκεται εἰς *Bulletin de Mathématiques élémentaires* (1908 - 1909), σ. σ. 178 καὶ 194, Berard).

Θεώρημα 167—III

765 δ. Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Δείξατε ὅτι:

1) Αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχηματίζουν τρίγωνον Δ'Ε'Ζ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ καὶ αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson τῶν σημείων Α, Β, Γ ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ σχηματίζουν τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

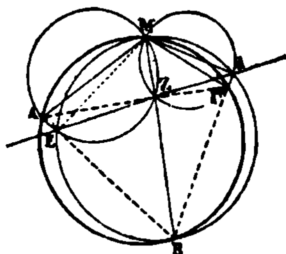
2) Τὰ τρίγωνα Δ'Ε'Ζ' καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἐγγράψιμα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. (S. Cantor, Mathesis, (1907), σ. 23).

Θεώρημα τοῦ Salmon 168

766. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Μ μιᾶς περιφερείας φέρωμεν τρεῖς χορδὰς καὶ γράψωμεν περιφερείας μὲ διαμέτρους τὰς εὐθείας αὐτάς, τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν τριῶν τούτων περιφερειῶν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἔστωσαν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ αἱ χορδαί.

Ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ἐγγεγραμμένου τ ιγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν εὐθεῖαν χὐτὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΑΜ, καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΒΜ. Ἑπομένως, ἡ κάθετος αὕτη συμπίπτει πρὸς τὴν κοινὴν χορδὴν ΜΕ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τομὴ Ε τῶν ἰδίων περιφερειῶν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν. Ὅμοια συμβαίνουν καὶ διὰ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Δ· ἤτοι τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε καὶ Ζ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (§ 22, 662).



766 α. Σημείωσις. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ *θεώρημα τοῦ Salmon* δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πόρισμα τοῦ θεωρήματος τοῦ *Robert Simson.*

Τὸ θεώρημα (§ 726) εὑρίσκεται εἰς τὴν *Nouv. Corresp. Mathematique* (1876) σ. 401, Catalan· ἀλλὰ τὸ *θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν* φαίνεται ὅτι ὀφείλεται εἰς τὸν Gergonne (Annales, τόμ. IV, 1813 - 14, σ. 251, σημ.).

Θεώρημα 168—I

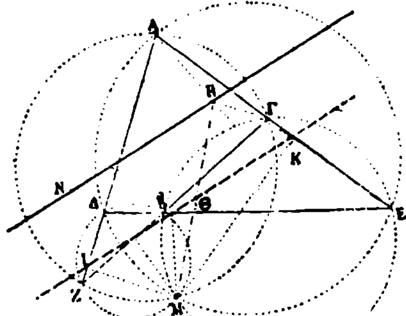
766 β. Δύο περιφέρεια (Δ) καὶ (Δ') τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ', τρεῖς δὲ χορδαὶ ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ τῆς περιφερείας (Δ) συναντοῦν τὴν (Δ') κατὰ τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Δείξατε, ὅτι αἱ περιφέρειαι ΑΑ'Μ', ΒΒ'Μ', ΓΓ'Μ' τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. (Sollertinski.-J. M. E. τοῦ Longchamps, (1893), σελ. 287.—N. A. (1889), σ. 72, IV, n° 11). Εἰδικὴ περίπτωσις μελετηθεῖσα εἰς *Etude Géométrique d'une famille de coniques* ὑπὸ Ch. Fabry.

Θεώρημα 169

767. Τὰ τέσσαρα ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο, εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (Aubert).

Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ, τοῦ *σημείου τοῦ Miquel* τοῦ τετραπλεύρου.

'Εκ τοῦ Μ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς τέσσαρας εὐθείας· οἱ τέσσαρες πόδες θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἐπειδὴ ἀνὰ τρεῖς θὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Simson. (*Μέθοδοι*, §§ 22 καὶ § 762).



Σχ. 400

'Αλλ' ἡ *εὐθεῖα τοῦ Simson* ΙΚ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὸ σημεῖον Μ πρὸς τὸ ὀρθόκεντρον ἑκάστου τριγώνου (§ 765 α). 'Εάν, λοιπόν, Η εἶναι ἓν τυχὸν ὀρθόκεντρον, τὸ μέσον Θ τῆς ΜΗ ἀνήκει εἰς τὴν ΙΚ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα μέσα τῶν εὐθειῶν, ὡς ἡ ΜΗ, ἀνήκουσιν εἰς τὴν ΙΚ, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ τέσσαρα ὀρθόκεντρα ἀνήκουσιν εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΝΗ, παράλληλον πρὸς τὴν ΙΚ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Η.

767 α. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ χωρὶς τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Simson· ἀλλ' ἡ ἀκολουθητέα πορεία εἶναι ἐπίπονος (Nouv. Annales, (1846), σ. 13 καὶ (1847), σ. 196).

'Η πρότασις ἀνήκει εἰς τὸν Steiner (*Journal de Crelle*, 2, σ. 97· B. Baltzer, Planimentrie, § 14, n° 11), μολονότι ἀπεδόθη εἰς τὸν Aubert ὑπὸ τοῦ Millet εἰς τὸ ἔργον του: *Principales méthodes de la Geométrie moderne*, σ. 176.

Θεώρημα 169—I

767 β. 'Επὶ τῶν ὑψῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τμήματα ΑΛ, ΒΜ, ΓΝ, ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς ἀποστάσεις ἑνὸς τυχόντος σημείου Ρ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ μὲ τὴν κατάλληλον φορὰν ἑκάστοτε ([45]). Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν εἶναι συγγραμμικά. (Davis. — Mathesis, 1910), σ. 189).

'Η εὐθεῖα ΛΜΝ εἶναι ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson, ἡ σχετικὴ πρὸς τὸ σημεῖον Ρ', τὸ διαμετρικὸν τοῦ Ρ.

Θεώρημα 170

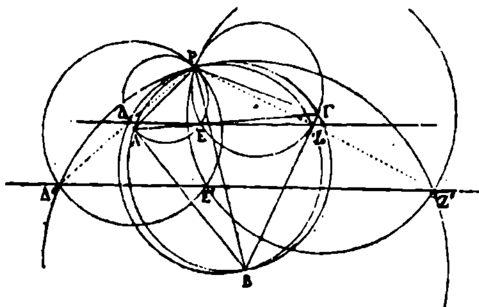
768. Τρεῖς περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν κέντρων των, τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. (Ν.Α. (1881), σ. 206).

"Εστωσαν Α, Β, Γ τὰ κέντρα καὶ Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς

45. Σημ. μετ. Δηλαδή, ἂν Π εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ φοραὶ ΡΠ καὶ ΑΛ νὰ εἶναι ὁμότροποι.

περιφερείας ΑΒΓ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρία σημεῖα Δ', Ε', Ζ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Πράγματι, αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ, τέμνονται κατὰ τρία-σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπ' εὐθείας (*Θεώρημα τοῦ Salmon*, § 766) καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ



Σχ. 461.

τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΕΡ, ΓΕΡ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφερείας.

Εἶναι λοιπὸν ἡ ΔΕΖ εὐθεῖα τοῦ Simson τοῦ σημείου Α διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· καὶ ἐπειδὴ

$$ΡΔ' = 2ΡΔ, \quad ΡΕ' = 2ΡΕ, \quad ΡΖ' = 2ΡΖ,$$

ἕπεται, ὅτι τὰ σημεῖα Δ', Ε', Ζ' εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

Θεώρημα 170—I

768 α. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας καὶ Δ, Ε, Ζ, τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Πρόκειται περὶ ἁπλοῦ πορίσματος τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (§ 768)· δυνάμεθα ὅμως νὰ τὸ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ νὰ συναγάγωμεν ὅτι ἡ *εὐθεῖα τοῦ Simson* διὰ τὸ σημεῖον Μ διαιρεῖ τὸ τμῆμα ΑΗ εἰς δύο μέρη ἴσα. (*Journal de Vuibert*, (1903), σ. 129 καὶ *Mathesis*, (1903), σ. 167, nº 14).

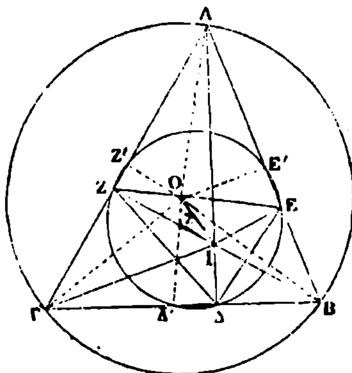
Θεώρημα τοῦ Nagel 171

769. Τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον, τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τὸ δὲ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἴσον ἀπέχει τῶν δύο ἄλλων σημείων. (Nagel, N. A. (1860), σ. 355, Θεώρημα III).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν

του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ι καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Αἱ ἐκ τῶν Α, Β, Γ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΕΖ, ΔΕ, ΖΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο (§ 757), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπειδὴ αἱ κάθετοι αὗται εἶναι καὶ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

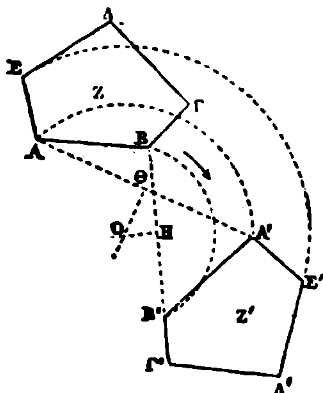


Σχ. 462.

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀφοῦ (§ 662) αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΖ, ΓΕ εἶναι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ τὸ Ι εἶναι τὸ κοινόν των σημεῖον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΙΟ καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς Ι, τῶν ὑψῶν καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας (§ 719), ἕπεται ἀμέσως ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως.

Θεώρημα τοῦ Chasles 172

770. Ἐὰν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα (Ζ) μετατοπίζεται καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου του, δύναται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ μιᾶς θέσεως (Ζ) εἰς μίαν ἄλλην (Ζ') διὰ μιᾶς στροφῆς περὶ ἓν κέντρον καταλλήλως ἐκλεγόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του.



Σχ. 463.

Ὑποτίθεται ὅτι τὰ σχήματα εἰς τὰς θέσεις (Ζ) καὶ (Ζ') εἶναι *εὐθέως ἴσα*, δηλ. ὅτι δύναται νὰ τεθῇ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου διὰ κινήσεών των ἐντὸς τοῦ κοινοῦ ἐπιπέδου των.

Τὸ σημεῖον Α δύναται νὰ συμπέσῃ πρὸς τὸ Α' διὰ κινήσεώς του ἐπὶ τυχόντος τόξου ἔχοντος ὡς χορδὴν τὴν ΑΑ'· ἐπίσης, τὸ σημεῖον Β δύναται νὰ συμπέσῃ πρὸς τὸ Β' διὰ κινήσεως ἐπὶ τυχόντος τόξου χορδῆς ΒΒ'.

Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν τούτων παρέχουν, διὰ τῆς τομῆς των Ο, τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης στροφῆς.

Ἐπειδή, ἂν φαντασθῶμεν τὸ σημεῖον Ο συνδεδεμένον δι' εὐθειῶν πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ σχήματος (Ζ), (κατὰ τὴν στροφὴν αὐτοῦ περὶ τὸ σημεῖον Ο εἰς τρόπον, ὥστε τὰ Α καὶ Β νὰ λάβουν τὰς θέσεις Α', Β'), τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ,

ΟΒΓ κλπ. θὰ λάβουν τὰς θέσεις ΟΑ'Β', ΟΓ'Δ', ΟΒ'Γ' κλπ. ("Ητοι, τὰ δύο σχήματα θὰ συμπέσουν σημεῖον κατὰ σημεῖον).

770 α. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐξηγγέλθη διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ μορφὴν τελείως γενικὴν καὶ καθαρῶς γεωμετρικὴν ὑπὸ τοῦ Chasles τὸ 1830. Διάφοροι εἰδικαὶ περιπτώσεις εἶχον προηγουμένως ἐξετασθῆ ὑπὸ τῶν Descartes καὶ Jean Bernoulli.

Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Chasles*, τὸ σχετικὸν πρὸς τὴν κίνησιν ἑνὸς σχήματος εἰς τὸν χῶρον, ἓν σχῆμα δύναται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ μιᾶς θέσεως εἰς ἄλλην διὰ μιᾶς *ἑλικοειδοῦς κινήσεως*, δηλ. (τοιαύτης ὥστε ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος νὰ διαγράψῃ ἓν τόξον *κυλινδρικῆς ἕλικος*) διὰ συνδυασμοῦ μιᾶς *στροφῆς* καὶ μιᾶς *μεταφορᾶς*.

Ἡ σπουδὴ τῶν σχημάτων τῶν ἀμεταβλήτων κατὰ μορφὴν ἀλλὰ μεταβλητῶν κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα, τοῦ ὁποίου τὰ προηγούμενα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις:

Δύο σχήματα τριῶν διαστάσεων, ὅμοια καὶ ἀντίστοιχα πρὸς σχήματα ἴσα δι' ἀλληλοεπιθέσεως — ἐξαιρουμένων τῶν στερεῶν τῶν ἴσων ἐκ συμμετρίας —, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο διάφοροι θέσεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος, κινουμένου κατὰ τρόπον, ὥστε ἕκαστον τῶν σημείων του νὰ διαγράφῃ λογαριθμικὴν κωνικὴν ἕλικα [40] *καὶ παραμένοντος πάντοτε ὁμοίου πρὸς ἑαυτό.* (Βλ. ἐπμ. § 2514).

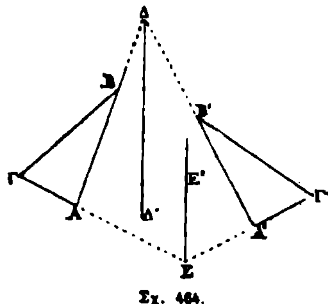
Σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα

771. Συχνότης τῆς χρήσεως αὐτῶν. "Οταν δίδονται εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σχήματα ἴσα, ταῦτα δύνανται, ἀδιαφόρως, νὰ εἶναι *εὐθέως* ἢ *ἀντιστρόφως* ἴσα· καὶ συμβαίνει πολλάκις εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς Ἀρχιτεκτονικῆς καὶ εἰς τὸ Σχέδιον νὰ συναντῶμεν συχνότερον σχήματα ἴσα ἐκ συμμετρίας πρὸς ἄξονα ἢ εὐθέως ἴσα. Χρήσιμον εἶναι, ἑπομένως, ὅπως μελετήσωμεν τὰς ἰδιότητας τῶν ἀντιστρόφως ἴσων σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου, δεδομένου μάλιστα, ὅτι ἡ σπουδὴ τῶν σχημάτων τοῦ χώρου ἀνάγεται συχνὰ εἰς τὴν θεώρησιν σχημάτων ἀντιστρόφως ἴσων ἢ ὁμοίων, κειμένων εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Θεώρημα 172—I

771 α. Ἐὰν δύο σχήματα εἶναι ἀντιστρόφως ἴσα, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο τυχουσῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

"Εστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα καὶ εἰς τυχοῦσαν θέσιν πρὸς ἄλληλα, ΔΔ' δὲ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ διχοτόμος ΕΕ' τῶν ΑΓ καὶ Α'Γ' πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΔ'.



Σχ. 464.

---

40. Σημ. μετ. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς καμπύλης αὐτῆς, βλ. ἐπμ. § 2514.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἰς τὰ Α καὶ Α' εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ Α'Γ' εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὰς ΑΒ καὶ Α'Β' καὶ ἑπομένως καὶ πρὸς τὴν διχοτόμον ΔΔ' τῆς γωνίας των· ὥστε...

Θεώρημα 172—II

771 β. Ὁ Γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων, ἅτινα συνδέουν ἀνὰ δύο τὰ ὁμόλογα σημεῖα δύο ἀντιστρόφως ἴσων σχημάτων, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Σχ. 405.

Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' τὰ ἀντιστρόφως ἴσα σχήματα καὶ Μ τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΔ, Β'Δ', ἀντιστοίχως ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὰς ΜΑ, ΜΑ', καθὼς καὶ τὰς ΜΔ, ΜΔ' καὶ ΔΔ'.

Τὰ τρίγωνα ΒΔΝ, Β'Δ'Ν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην ΒΔ = Β'Δ' καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, καὶ ἑπομένως τὸ Ν εἶναι μέσον τῶν ΔΔ' καὶ ΒΒ'. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΜΔ, ΜΔ' εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὰς ΑΒ, Α'Β' ἀντιστοίχως, τὸ τρίγωνον ΔΜΔ' εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ὕψος του ΜΝ διχοτόμος τῆς γωνίας Μ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΧ.

Εἶναι λοιπὸν ἡ ΜΝ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ', παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας δύο ὁμολόγων πλευρῶν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τυχούσης ἄλλης, ὡς αἱ ΑΑ' καὶ ΒΒ', εὐθείας ΓΓ'. Ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις τῶν διχοτόμων εἶναι σταθερά.

771 γ. Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΜΟΝ δύναται νὰ ὀνομασθῇ *εὐθεῖα τῶν μέσων*. Ὁ ὅρος οὗτος ἐχρησιμοποιήθη ὑπὸ τοῦ Chasles εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ ὁμόλογα σημεῖα Α, Β... Α', Β'... εὑρίσκονται ἐπὶ δύο εὐθειῶν, ὁρίζοντα οὕτω δύο ἴσας σημειοσειράς.

Θεώρημα 172—III

771 δ. Τὰ ὁμόλογα σημεῖα δύο ἀντιστρόφως ἴσων σχημάτων ἴσον ἀπέχουν ἀπὸ τῆς εὐθείας τῶν μέσων.

Τοῦτο εἶναι ἁπλῆ συνέπεια τῶν ἰσοτήτων ΜΑ=ΜΑ', ΝΒ=ΝΒ', ΟΓ=ΟΓ' κλπ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ τὸ ἀποδείξωμεν ἀνεξαρτήτως τῆς ἰδιότητος τῆς εὐθείας ΜΝ, καθ' ἣν αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐπειδὴ εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἡ ἰσότης τῶν ἀποστάσεων τῶν Γ, Γ' ἀπὸ τῆς ΜΝ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν ἀποστάσεων ἀπ' αὐτῆς τῶν Α, Α' καὶ Β, Β'.

771 ε. Παρατηρήσεις. 1) Κατὰ τὴν δευτέραν αὐτὴν ἀπόδειξιν, συμπεραίνομεν ὅτι ΟΓ = ΟΓ', δηλ. ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ τῶν μέσων

Μ, Ν διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ μέσου Ο πάσης ἄλλης εὐθείας ὡς ἡ ΓΓ'.

2) Κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν διαιροῦν τὰ τμήματα ΑΑ', ΒΒ' κατὰ τὸν λόγον ὁμοιότητος, αἱ τεταγμέναι τῶν Γ καὶ Γ' ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὅτι, κατὰ συνέπειαν, ἡ εὐθεῖα ΜΝ διαιρεῖ καὶ τὸ τμῆμα ΓΓ' κατὰ τὸν ἴδιον λόγον.

Ἡ ἰδιότης αὕτη θὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν σχημάτων τῶν ἀντιστρόφως ὁμοίων εἰς τὸν χῶρον.

Θεώρημα 172—IV

771 ζ. Δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα δύνανται νὰ καταστοῦν συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου των.

Ἔστωσαν (Σ), (Σ') δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα καὶ ΧΥ μία εὐθεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδόν των.

Ἔστω (Σ'') τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ (Σ) κατὰ τὴν συμμετρίαν πρὸς τὴν ΧΥ. Ἐπειδὴ τὰ σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι ἀμφότερα ἀντιστρόφως ἴσα πρὸς τὸ σχῆμα (Σ), ταῦτα θὰ εἶναι εὐθέως ἴσα πρὸς ἄλληλα. Κατ' ἀκολουθίαν, δύναται νὰ ταυτισθῇ τὸ σχῆμα (Σ') πρὸς τὸ (Σ'') διὰ καταλλήλου στροφῆς ἢ μεταφορᾶς.

Πρόβλημα 172—V

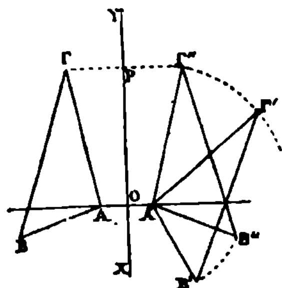
771 η. **Δοθέντων δύο σχημάτων ἀντιστρόφως ἴσων, νὰ καταστοῦν ταῦτα συμμετρικὰ ἀλλήλων διὰ μιᾶς στροφῆς.**

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, ὡς ἐπιδεχόμενον ἀπειρίαν λύσεων. Ἰδοὺ δύο λύσεις αὐτοῦ, αἱ πλέον ἀξιοσημείωτοι:

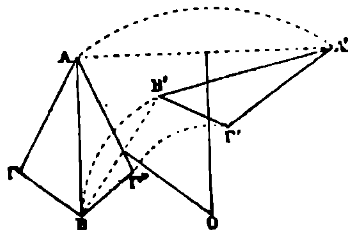
1) *Ἓν σημεῖον τοῦ κινητοῦ σχήματος λαμβάνεται ὡς κέντρον περιστροφῆς.*

Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' τὰ δοθέντα σχήματα καὶ Α' τὸ σημεῖον τοῦ ἑνός, τὸ ἐκλεγὲν ὡς κέντρον τῆς στροφῆς. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς εὐθείας ΑΑ' φέρομεν εὐθεῖαν ΧΥ κάθετον ἐπ' αὐτήν (Σχ. 466)· ἡ εὐθεῖα ΧΥ εἶναι ὁ ζητούμενος ἄξων συμμετρίας.

Ἔστω Γ'' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον· ἡ στροφὴ τοῦ σχήματος Α'Β'Γ' θὰ γίνῃ κατὰ τὸ τόξον Γ'Γ'' τῆς περιφερείας (Α', Α'Γ').



Σχ. 466.



Σχ. 467.

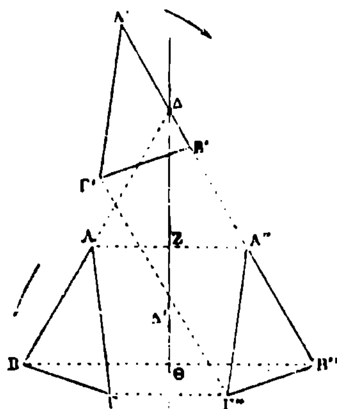
2) *Μία πλευρὰ τοῦ σταθεροῦ σχήματος λαμβάνεται ὡς ἄξων συμμετρίας.*

Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' τὰ δοθέντα σχήματα καὶ ΑΒ ἡ ἐκλεγεῖσα ὡς ἄξων συμμετρίας πλευρὰ (Σχ. 467).

'Ορίζεται τὸ κέντρον στροφῆς Ο, ὡς ἡ τομὴ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

Πρόβλημα 172—VI

771 θ. Δοθέντων δύο σχημάτων ἀντιστρόφως ἴσων, νὰ καταστοῦν ταῦτα συμμετρικὰ ἀλλήλων διὰ μιᾶς μεταφορᾶς.



Σχ. 468.

Τὸ πρόβλημα εἶναι καὶ πάλιν ἀόριστον· ἐπειδὴ ὡς ἄξων συμμετρίας δύναται νὰ ἐκλεγῇ ἡ τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν διεύθυνσιν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν δύο τυχουσῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν σχημάτων. Αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι ἐκ τῶν κατασκευῶν εἶναι αἱ ἑπόμεναι:

1η Κατασκευή: *'Ολίσθησις κατὰ μῆκος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ κινητοῦ σχήματος.*

Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' τὰ δοθέντα σχήματα καὶ Α'Β' ἡ διεύθυνσις τῆς μεταφορᾶς.

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΔΔ' τῆς γωνίας τῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. 'Αρκεῖ νὰ ἀχθῇ τὸ Α' εἰς Α'' πρὸς τὴν ΔΔ'.

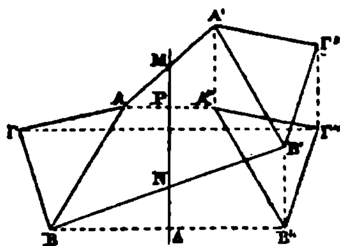
ὅπου Α'' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΔΔ'.

2α Κατασκευή: *'Ολίσθησις παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῶν μέσων.*

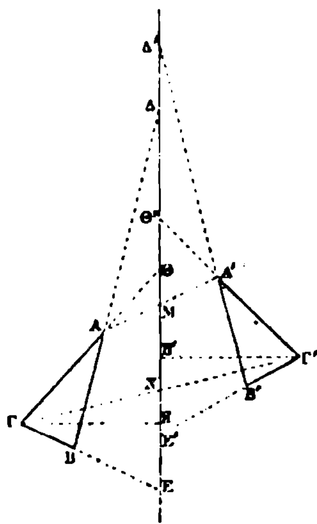
Ἔστω ΜΝ ἡ εὐθεῖα αὔτη (Σχ.469).

Φέρομεν τὴν παράλληλον Α'Α'' πρὸς τὴν ΜΝ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Α'' μετὰ τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ΑΡ ἐπὶ τὴν ΜΝ. Θὰ ἔχωμεν ΡΑ''= ΡΑ κλπ.

771 ι. Παρατήρησις. 'Η *εὐθεῖα τῶν μέσων* εἶναι ἡ εὐθεῖα καθ' ἣν τέμνονται, κατά τινα τρόπον, τὰ ἐπί-



Σχ. 469.



Σχ. 470.

πεδα τῶν δύο δοθέντων σχημάτων καὶ δύναται νὰ νοηθῇ ὡς σχη-

ματιζομένη ἐκ τῆς ἐπιθέσεως μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁμολόγου της· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὴν ὀνομάσωμεν *διπλῆν εὐθεῖαν*, μολονότι τὰ ὁμόλογα σημεῖα ἐπ' αὐτῆς δὲν συμπίπτουν (Σχ. 470).

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς εὐθείας τῶν μέσων διατυποῦμεν ὡς ἑξῆς:

Δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα ὁρίζουν ἐπὶ τῆς *εὐθείας τῶν μέσων* σημειοσειρὰς Δ, Θ, Η, Ε, Δ', Θ', Η', Ε' ἴσας. Διὰ καταλλήλου ὀλισθήσεως τῆς μιᾶς τῶν σημειοσειρῶν τούτων κατὰ τὴν ἰδίαν της διεύθυνσιν, ἐπιτυγχάνομεν τὴν σύμπτωσιν τῶν δύο σημειοσειρῶν καὶ τὰ ἀντιστρόφως ἴσα σχήματα ἀποβαίνουν συμμετρικὰ πρὸς τὴν διπλῆν εὐθεῖαν.

Οὕτω, δι' ὀλισθήσεως τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος Α'Β'Γ' κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας τῶν μέσων καὶ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ Δ' νὰ συμπέσῃ πρὸς τὸ Δ, ἐπέρχεται σύμπτωσις καὶ τοῦ Ε, πρὸς τὸ Ε', τοῦ Θ πρὸς τὸ Θ' κλπ. Ἐπειδὴ εἶναι

$$ΔΔ' = ΕΕ' = ΘΘ' = ΗΗ'.$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

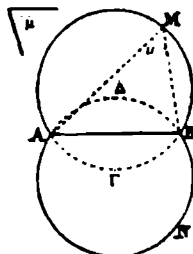
772. Σχέσεις ἀποστάσεων. Διὰ τὰ θέματα τοῦ ΙΙ Βιβλίου δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν παρὰ τὰς ἑξῆς τρεῖς μόνον σχέσεις ἀποστάσεων:

1) *Ἓν σημεῖον δύναται νὰ εὑρίσκεται εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ ἑνὸς δοθέντος ἄλλου·* ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἀκτῖνα τὴν σταθερὰν ἀπόστασιν.

2) *Ἓν σημεῖον δύναται νὰ εὑρίσκεται εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ εὐθείας ἢ περιφερείας·* ὁ τόπος εἶναι μία παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἢ περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης.

3) *Ἓν σημεῖον δύναται νὰ ἀπέχῃ ἴσον δύο εὐθειῶν·* ὁ τόπος εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν.

772 α. Γωνιακὴ σχέσις. Ἡ μᾶλλον χρησιμοποιουμένη εἶναι ἐκείνη μιᾶς σταθερᾶς γωνίας τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων. Ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Μ εἶναι τόξον κυκλικοῦ τμήματος γωνίας μ καὶ ὁ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο συμμετρικὰ τόξα ΑΜΒ, ΑΝΒ (Σχ. 471). Τὰ ἐστιγμένα τόξα τῶν περιφερειῶν τοῦ σχήματος ἀντιστοιχοῦν εἰς γωνίαν ἴσην πρὸς 180° — μ.



Σχ. 471.

772 β. Διάφοροι τόποι. Ἐξ ἑνὸς θεωρήματος ἀναφερομένου εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς ἀξιοσημειώτου σημείου σχήματός τινος, δυνάμεθα νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τοῦ τόπου τοῦ σημείου αὐτοῦ, ὅταν μεταβάλλωνται κατὰ μέγεθος ἢ θέσιν ἓν ἢ περισσότερα τῶν γεωμετρικῶν δεδομένων τοῦ σχήματος, ἐνῷ ὡρισμένα ἄλλα παραμένουν ἀμετάβλητα.

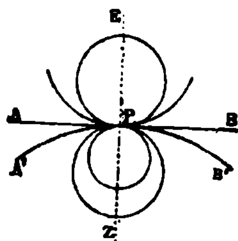
Ἰδοὺ μερικὰ τοιαῦτα θεωρήματα σχετιζόμενα πρὸς τὸ τρίγωνον.

Αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ κέντρον βάρους, κατὰ τὴν Στατικήν, τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου.

Τὰ τρία ὕψη τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.
Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι ὁρίζουν τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.
Αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι καθορίζουν τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.
Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.
Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, τῆς συνδεούσης τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.
Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα, ἂς ὑποθέσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μεταβάλλεται εἰς τρόπον ὥστε ἡ βάσις του ΒΓ νὰ παραμένῃ σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντι γωνίᾳ Α.
Εἰς ἑκάστην θέσιν τῆς κινητῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος μὲ χορδὴν ΒΓ καὶ γωνίαν ἴσην πρὸς Α, τὸ σημεῖον τομῆς Μ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου καταλαμβάνει καὶ μίαν θέσιν, διάφορον ἑκάστοτε, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Τὸ σύνολον τῶν θέσεων τούτων εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.
Σημειωτέον, ἐν τούτοις, ὅτι εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἡ σπουδὴ τοῦ τόπου ἀπαιτεῖ γνώσεις μᾶλλον ἐκτεταμένας ἀπὸ ἐκείνας τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας*.
Εἰς τό, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, μεταβαλλόμενον τρίγωνον :
Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων γράφει κυκλικὸν τόξον (ΙΙΙ βιβλίον).
Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν γράφει ἐπίσης κυκλικὸν τόξον καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὰ κέντρα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ παρεγγεγραμένων περιφερειῶν.
Τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας μένει σταθερόν.
Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων γράφει κυκλικὸν τόξον (ΙΙΙ βιβλίον).
Ἐπίσης :
Οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ὑψῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΒΓ.
Οἱ τόποι τῶν μέσων τῶν ἐκ τῶν Β καὶ Γ διαμέσων εἶναι κυκλικὰ τόξα.
Ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ *Lemoine* εἶναι ἔλλειψις (§ 2374).

Χρῆσις γωνιακῆς σχέσεως

Τόπος 173



Σχ. 472.

773. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων εἰς δοθὲν σημεῖον Ρ μιᾶς εὐθείας ΑΒ ἢ περιφερείας Α'Β'.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ πρέπει νὰ ἐφάπτεται εἰς τὸ Ρ πάντων τῶν τόξων τῶν περιφερειῶν τοῦ τόπου. Τὰ κέντρα των, ἑπομένως, δύνανται νὰ ἔχουν τυχοῦσαν θέσιν ἐπὶ τῆς ἀπεράτου εὐθείας ΕΖ, καθέτου εἰς τὸ Ρ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἢ τὴν περιφέρειαν Α'Β'.

Τόπος 173—I

774. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ὁ ζητούμενος τόπος συμπίπτει πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἴσων ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν δύο ἀπεράτων εὐθειῶν, αἵτινες εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν εἰς τὸ σημεῖον τομῆς των Ο.

Τόπος 174

775. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων μία δοθεῖσα περιφέρεια (Κ) φαίνεται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν Φ.

Φέρομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας σχηματιζούσης γωνίαν Φ καὶ γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης καὶ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων.

Τόπος 174—I

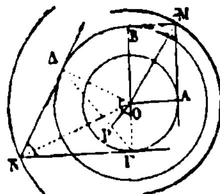
776. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐξ ὧν ἄγονται ἐφαπτόμεναι δοθέντος μήκους μ ἐπὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν (Α).

Εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς προηγουμένης.

Τόπος 175

777. Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας μία πλευρὰ ἐφάπτεται τῆς μιᾶς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη τῆς ἑτέρας;

Τὸ σχῆμα ΟΑΜΒ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ γνωστὰς τὰς πλευρὰς του· ἄρα καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΟΜ εἶναι γνωστόν. Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῶν δοθεισῶν.



Σχ. 473.

Τόπος 175—I

778. Τὰ ἴδια δεδομένα ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι τυχοῦσα σταθερὰ Ν.

Ὁ τόπος εἶναι πάλιν περιφέρεια ὁμόκεντρος τῶν δοθεισῶν· ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΟΓΝΔ (Σχ. 473) εἶναι ἀμεταβλήτου μεγέθους, ἀφοῦ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ του παραμένουν σταθεραί.

Περιβάλλουσα 175—II

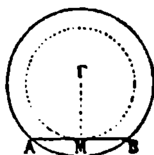
779. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΓΔ τῶν ἐπαφῶν (προηγ. σχῆμα) ὅταν ἡ γωνία Ν μένῃ σταθερά;

Περὶ *περιβαλλουσῶν* βλ. §§ 119 καὶ ἑπμ.

Ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα ΟΡ (Σχ. 473). Ἐπειδή, ἡ εὐθεῖα ΓΔ εὑρίσκεται εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν ΟΡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο, καὶ παραμένει σταθερῶς ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Ο, ΟΡ).

Τόπος 176

780. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν σταθεροῦ μήκους χορδῶν ΑΒ μιᾶς περιφερείας;



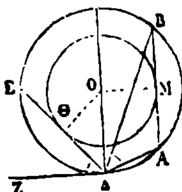
Σχ. 474.

Εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ δι' ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς κινητῆς χορδῆς ἀλλ' εἰς σταθερὰν θέσιν ἐπ' αὐτῆς.

Ὁ τόπος (§ 776) εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω.

Τόπος 176—I

781. Γωνία ΑΔΒ ἔχει τὴν κορυφὴν Δ σταθερὰν ἐπὶ δοθείσης περιφερείας καὶ μέγεθος ὡρισμένον· ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς χορδῆς ΑΒ;



Σχ. 475.

Ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ τόξον θὰ εἶναι σταθερόν, ἄρα καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ. Ὁ ζητούμενος, ἑπομένως, τόπος τοῦ μέσου Μ εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης.

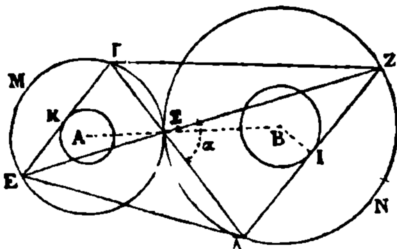
Τόπος 176—II

782. Γωνία σταθεροῦ μεγέθους ἔχει τὴν κορυφὴν ἐπὶ δοθείσης περιφερείας ἐνῷ μία πλευρὰ αὐτῆς διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ἀποκοπτομένης χορδῆς ὑπὸ τῆς περιφερείας;

Ὁ τόπος εἶναι πάλιν περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης.

Τόπος 176—III

783. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν βάσεων τῶν τραπεζίων, τῶν ἐχόντων ὡς διαγωνίους δύο τεμνούσας δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ἀγομένας διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου καὶ τεμνομένας κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν;



Σχ. 476.

Ὁ τόπος τοῦ μέσου Κ τῆς βάσεως ΕΓ εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης (Α)· ὁμοίως διὰ τὸν τόπον τοῦ μέσου Ι τῆς ΔΖ βάσεως.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, αἱ τέμνουσαι εἶναι αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου.

2) Διὰ τὰ ὁμόλογα σημεῖα, τὰ κείμενα ἐπὶ τῶν βάσεων καὶ

ἐπὶ μιᾶς τυχούσης τεμνούσης, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο περιφερειῶν ὁμοκέντρων τῶν δοθεισῶν.

3) Τὸ ζήτημα (§ 783) εἶναι ἐπέκτασις τοῦ τῆς § 780.

Τόπος 177

784. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν δοθείσης ἀκτῖνος ρ, αἵτινες ἀποκόπτουν ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΑΒ χορδὰς δοθέντος μήκους μ;

Ὁ ζητούμενος τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ, ἀγομένων παραλλήλως τῆς ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Τόπος 177—I

785. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ τεμνουσῶν δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὰς δοθέντος μήκους μ;

Ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο περιφερειῶν ὁμοκέντρων τῆς δοθείσης.

Τόπος 177—II

786. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν (§ 620);

Ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης. Ὁμοίως, ἐὰν αἱ περιφέρειαι τέμνωνται κατὰ τυχοῦσαν ἀλλ' ὡρισμένην γωνίαν.

Τόπος 178

787. Ἐξ ἑκάστου σημείου Μ μιᾶς περιφερείας φέρομεν εὐθείας παραλλήλους καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν (κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν πάντοτε) τμῆμα ΜΝ σταθεροῦ μήκους λ. Ποῖος ὁ τόπος τῶν οὕτω λαμβανομένων σημείων Ν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 58).

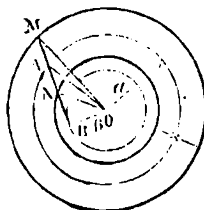
Τόπος 178—I

788. Ὁμοίως, ἀλλὰ *τὸ ἀρχικὸν σχῆμα εἶναι τυχόν.*

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 59).

Τόπος 178—II

789. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ἐξ ἑκάστου σημείου Μ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἄγομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς ἐσωτερικῆς. Ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Μ λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα ΑΜ = ΑΝ = λ. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Ν;



Σχ. 477.

Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι. Ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὁμοκέντρων πρὸς τὰς δοθείσας περιφερειῶν. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀκτίνων των γίνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ΙΙΙ Βιβλίου :

$$AB^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad AB = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$BM = \lambda + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad BN = -\lambda + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$OM^2 = BM^2 + \beta^2 = \lambda^2 + 2\lambda\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha^2 - \beta^2 + \beta^2.$$

Ὥστε

$$OM^2 = \lambda^2 + \alpha^2 + 2\lambda\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \qquad (1)$$

$$ON^2 = \lambda^2 + \alpha^2 - 2\lambda\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \qquad (2)$$

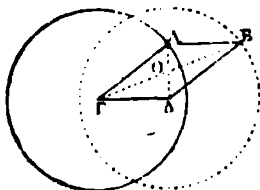
Ἐπαλήθευσις. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$OM^2 + ON^2 = 2\lambda^2 + 2\alpha^2.$$

Πράγματι, εἰς τὸ τρίγωνον ΜΟΝ ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ.

Τόπος 178—III

790. **Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἡ πλευρὰ ΓΔ εἶναι σταθερὰ θέσει καὶ μεγέθει τὸ δὲ μῆκος τῆς ΑΓ σταθερόν. Ποῖοι οἱ τόποι τῶν μέσων τῶν τριῶν κινητῶν πλευρῶν;**



Σχ. 478.

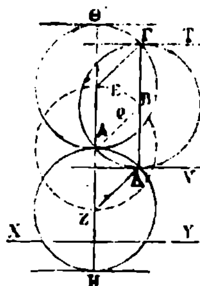
Ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΑΒ εἶναι περιφέρεια, ἴση πρὸς τὰς δύο πρώτας καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

Ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΓΑ εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ΓΑ. Ὁμοίως, ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΔΒ εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν, $\frac{ΒΔ}{2}$.

Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τοῦ τόπου τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἀνάγεται εἰς τὸ ΙΙΙ Βιβλίον, ὡς τόπος τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης ἓν σταθερὸν σημεῖον Γ πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς περιφερείας (Δ).

Τόπος 179

791. ***Μία περιφέρεια στρέφεται περὶ ἓν ἐκ τῶν σημείων της καὶ εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγομεν δύο ἐφαπτομένας παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς; (Concours general, 1865).***



Σχ. 479.

Ἔστωσα. ΧΥ ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις, Α τὸ σταθερὸν σημεῖον, Β τὸ κέντρον τῆς κινητῆς περιφερείας εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν της καὶ ΓΤ, ΔV αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΧΥ ἐφαπτόμεναι.

Ὁ τόπος τῶν κέντρων Β εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν τῆς κινητῆς περιφερείας.

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι αἱ τομαὶ τῆς κινητῆς περιφερείας καὶ εὐθείας ἐκ τοῦ κέντρου της Β καθέτου ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν ΧΥ. Φέροντες δὲ τὴν

ΕΑΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ συνδέοντες τὰ Γ, Δ μετὰ τῶν Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, παρατηροῦμεν ἀμέσως, ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΓΔΖ ὅτι

$$ΕΓ = ΖΔ = ΑΒ = ρ.$$

Ἐπομένως, ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ρ, ὁ δὲ τόπος τοῦ Δ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν.

Παρατήρησις. Ὁ ἀνωτέρω τόπος συμπίπτει μὲ ἐκεῖνον τῶν σημείων Γ καὶ Δ, ἅτινα λαμβάνομεν φέροντες ἐξ ἑκάστου σημείου Β τῆς περιφερείας ΖΒΕ τμήματα ΒΓ, ΒΔ, ἴσα πρὸς ρ καὶ παράλληλα πρὸς τὴν κάθετον διεύθυνσιν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ΧΥ.

Τόπος 179—Ι

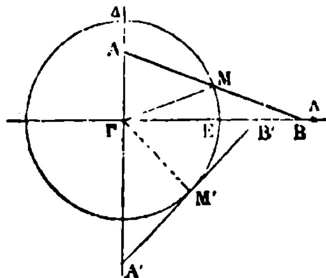
792. Τὸ ἴδιον ζήτημα ἀλλὰ ἡ κινητὴ περιφέρεια (Μ) ἐφάπτεται σταθερῶς μιᾶς δοθείσης περιφερείας (Ν).

Εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης (Ν).

Τόπος 180

793. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ μιᾶς εὐθείας, σταθεροῦ μήκους, ΑΒ, κινουμένης εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ἄκρα της Α καὶ Β νὰ γράφουν τὰς πλευρὰς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας;

Ἔστω ΑΒ μία τυχοῦσα θέσις τῆς κινητῆς εὐθείας καὶ $ΓΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΒ. Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς ΓΜ εἶναι σταθερόν, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι τὸ τόξον ΔΜΕ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα $ΓΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Σχ. 480.

793 α. Σημείωσις. 1) Ὁ τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου κινητοῦ τμήματος ΑΒ ὅταν ἡ γωνία Γ δὲν εἶναι ὀρθή, εἶναι ἔλλειψις ἔχουσα ὡς κέντρον τὸ σημεῖον Γ.

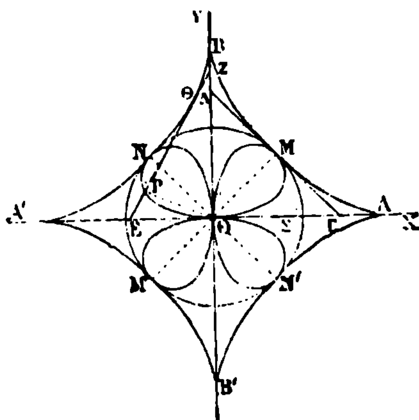
Ὁ τόπος ἑνὸς τυχόντος ἄλλου σημείου τοῦ τμήματος—διαφόρου τοῦ μέσου—εἶναι πάλιν ἔλλειψις, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή. (G., nº 643).

2) Ὁ τόπος τῆς προβολῆς Ρ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τό, σταθεροῦ μήκους, τμῆμα ΕΖ (σχ. 481), εἶναι ὁ *τετράφυλλος ῥόδαξ* ΟΜΝ Μ'Ν'. Η καμπύλη αὐτὴ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΣ καθὼς καὶ τῶν δύο ἀξόνων ΟΧ, ΟΥ. (*Éléments de Géométrie Descriptive*, nº 1228).

3) Η περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΕΖ ὀνομάζεται *ἀστροειδὴς* καὶ ἡ ἐξίσωσίς της ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ΧΟΥ τοῦ ἰδίου σχήματος εἶναι

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = γ^{\frac{2}{3}}$$

ὅπου γ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΕΖ. Ἡ καμπύλη αὕτη ἐφάπτεται ἐπίσης τοῦ κύκλου ΟΣ καὶ τῶν ἀξόνων καὶ ἔχει τέσσαρα σημεῖα ἀνακάμψεως, τὰ Α, Β, Α', Β'.



Σχ. 481.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ *Schooten* (§§ 144, 2160), πᾶν σημεῖον σταθερὸν ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ γράφει ἔλλειψιν.

Διὰ τὴν *ἀστροειδῆ* βλ. Ν. Α. (1878), σ. 321, Manheim.

Τόπος 180— Ι

794. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἔχει σταθερὸν μῆκος καὶ τὰ ἄκρα της κινοῦνται ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ; (Σχ. 480).

Αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ δύο τρίτα τοῦ μήκους των ἀπὸ τῶν κορυφῶν· ἐπομένως καὶ ἀφοῦ τὸ μῆκος ΓΜ εἶναι σταθερόν, ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὰ δύο τρία τῆς ΓΜ.

Τόπος 180—ΙΙ

795. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ο δύο περιφερειῶν μεταβλητῶν ἀκτίνων, ἐφαπτομένων ἀλλήλων καὶ εὐθείας εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς;

Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς διακέντρου τῶν περιφερειῶν τούτων;

(*Μέθοδοι*, § 125).

Παρατήρησις. Τὸ ζήτημα τοῦτο εἶναι ειδικὴ περίπτωσις ἑνὸς ἑπομένου (§ 820).

Τόπος 181

796. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν μιᾶς περιφερείας, τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου;

(*Μέθοδοι*, § § 65 καὶ 80).

Τόπος 181—I

797. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία σταθερά. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του;

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΑΓ μὲ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸ γωνίαν ἴσην πρὸς Α. Ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἴσων περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς ΟΓ καὶ ΟΒ.

Τὰ μέρη τῶν περιφερειῶν τούτων, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τόξου τῆς περιφερείας ΑΒΓ, τοῦ συμπληροῦντος αὐτὴν μετὰ τοῦ τόξου ΑΒΓ, ἀντιστοιχοῦν εἰς τρίγωνα μὲ γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν 180° — Α.

Τόπος 181—II

797 α. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ δύο περιφερειῶν (Δ). (Ε) ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐξωτερικῶς καὶ μιᾶς τρίτης (Γ) εἰς δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς;

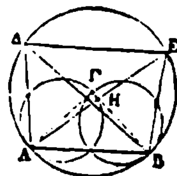
Ἔστωσαν Δ, Ε, Γ τὰ κέντρα τῶν τριῶν περιφερειῶν. Ἡ γωνία ΑΜΒ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\widehat{\Delta}+\widehat{E}}{2}$ ἢ $90^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ καὶ εἶναι σταθερὰ ἀφοῦ ἡ γωνία Γ = ΔΓΕ εἶναι σταθερά.

Ἑπομένως, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ, μὲ χορδὴν ΑΒ καὶ ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν σταθερὰν $90^\circ - \frac{\Gamma}{2}$.

Τὸ συμπληροῦν τὴν περιφέρειαν ΑΜΒ τόξον, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων Μ ὅταν αἱ περιφέρειαι (Δ) καὶ (Ε) ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς.

Τόπος 182

798. Εἰς περιφέρειαν (Γ), μία σταθερὰ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ μία τῶν βάσεων ἐγγεγραμμένων τραπεζίων. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου ἑκάστης διαγωνίου καὶ ἑκάστης τῶν παρακειμένων εἰς τὴν ΑΒ πλευρῶν τῶν τραπεζίων τούτων;



Σχ. 462

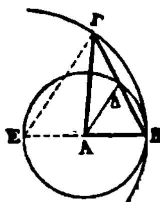
Τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΔ, ΑΕ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς γραφομένης ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡς διαμέτρου (§ 796). Τὰ δὲ μέσα τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπὶ τῆς ἐχούσης τὴν ΒΓ ὡς διάμετρον.

Τόπος 182—I

799. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ τριγώνου ΑΒΓ ἔχοντος τὴν βάσιν ΑΒ σταθερὰν καὶ τὴν ἐκ τοῦ Α διάμεσον ΑΔ δοθέντος μήκους;

Ἂς λάβωμεν ΑΕ = ΑΒ· ἐπειδὴ ἡ ΑΔ συνδέει τὰ μέσα τῶν ΒΕ καὶ ΒΓ πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΕΒΓ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΕΓ.

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος τόπος τοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς ΑΔ.



Σχ. 483.

Τόπος 183

800. Εἰς μεταβλητὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι σταθερὰ καὶ τὰ μήκη τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ δεδομένα. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ἄλλης διαγωνίου καὶ τοῦ μέσου Ο τῆς εὐθείας ΜΝ τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων;

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἀμετάβλητον καὶ τὰ σημεῖα Β, Δ σταθερά.

Ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ.

1) Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Μ φέρωμεν τὴν ΜΡ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΡΑ} = \text{ΡΒ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΜΡ} = \frac{1}{2}\,\text{ΒΓ} = \text{σταθερά}.$$

Ὁ τόπος, ἄρα, τοῦ Μ εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Ρ καὶ ἀκτῖνος $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

2) Ἔστω Θ τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΡΝ τοῦ σταθεροῦ τριγώνου ΑΒΔ. Ἐπειδὴ

$$\text{ΘΟ} = \frac{1}{2}\,\text{ΡΜ} = \frac{1}{4}\,\text{ΒΓ},$$

ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Θ καὶ ἀκτῖνα τὸ τέταρτον τῆς ΒΓ.

Σχ. 484.

3) Ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, τῶν ἑνουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΑΔ, ΒΓ, ταυτίζεται πρὸς τὸν τόπον τοῦ σημείου Ο (§ 548).

Τόπος 184

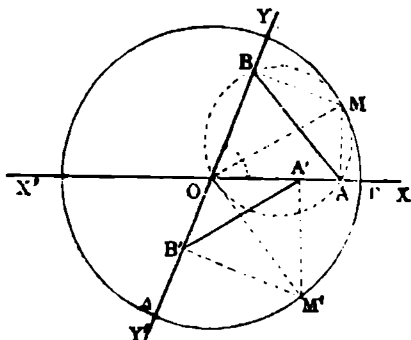
801. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν ἐκ τοῦ Μ καθέτων ΜΑ, ΜΒ ἐπὶ δύο εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, ἔχει σταθερὸν μῆκος;

Ἐκτὸς τῆς ἑπομένης ἀποδείξεως, δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν καὶ εἰς τὰς *Μεθόδους*, § 142.

1) Ἔστω ΑΒ = λ (Σχ. 485). Ἐπειδή, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ, ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία Ο διατηροῦν σταθερὰ μεγέθη, ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτὸ θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερά· καὶ ἐπειδή, ἀκόμη, τὸ σημεῖον Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΟΜ, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΜ.

2) *Πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας* ΜΜ΄ *ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον.*

Ἔστω Α΄, Β΄ δύο σημεῖα ἐπὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ εἰς ἀπόστασιν λ ἀπ' ἀλλήλων καὶ Μ΄ ἡ τομὴ τῶν εἰς αὐτὰ καθέτων ἐπὶ τὰς εὐθείας. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΟΑ΄Μ΄Β΄ εἶναι ἐγγράψιμον, ἡ περιγεγραμμένη εἰς αὐτὸ περιφέρεια συμπίπτει πρὸς τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ τρίγωνον Α΄Μ΄Β΄ ἢ πρὸς τὴν εἰς τὸ ΑΒΜ, ἀφοῦ αἱ γωνίαι εἰς τὰ Μ΄ καὶ Ο εἶναι προφανῶς ἴσαι· ἄρα ΟΜ΄ = ΟΜ καὶ τὸ σημεῖον Μ΄ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΜ).



Σχ. 485.

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι τὰ σημεῖα τοῦ τόπου εἰς τὰς θέσεις, καθ' ἃς ἡ ΑΒ ἀποβαίνει κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΥ, ΟΧ ἀντιστοίχως.

801 α. Σημείωσις. 1) Ἡ περιβάλλουσα τοῦ σταθεροῦ μήκους τμήματος ΑΒ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πλαγιογωνίων ἀξόνων ΟΧ, ΟΥ, εἶναι καμπύλη ἀνάλογος πρὸς τὴν *ἀστροειδῆ* (§§ 702 α, 793 α) καὶ ἔχουσα ὡς ἄξονας συμμετρίας τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν εἰς τὸ Ο.

2) Ἐὰν διὰ τῶν Α καὶ Β φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας, ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς των εἶναι ἔλλειψις μὲ τὰς ἴσας συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς κατὰ τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ.

Εἰς τὴν Κινητικὴν δεικνύεται ὅτι, πᾶσα ἐπίπεδος κίνησις δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη διὰ τῆς κυλίσεως μιᾶς καμπύλης ἐπὶ μιᾶς ἄλλης σταθερᾶς. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν δύο σημεῖα, Α καὶ Β, σταθερὰ τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου γράφουν εὐθείας, ΟΧ, ΟΥ, ἐπὶ τοῦ ἀκινήτου ἐπιπέδου, ἡ κυλιομένη καμπύλη εἶναι περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α, Β καὶ τῆς τομῆς Ο τῶν δύο εὐθειῶν· ἡ δὲ *βάσις*, δηλ. ἡ καμπύλη ἐπὶ τῆς ὁποίας κυλίεται ὁ κύκλος ΑΟΒ, εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν ἐκείνης τῆς περιφερείας ΑΟΒ.

Πᾶν σημεῖον τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου γράφει ἔλλειψιν (§ 2160)· εἰς ὡρισμένας ὅμως περιπτώσεις ἡ καμπύλη αὕτη δύναται νὰ ἀποβῇ καὶ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο (§ 825).

Βλ. σχτ.: Int. d. Math., (1905), σ. 203, n° 2901. Escott, Mathieu.

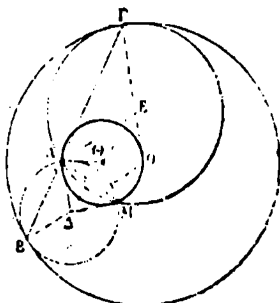
Τόπος 185.

802. Δίδεται *περιφέρεια μὲ κέντρον* Ο *καὶ σταθερὸν σημεῖον* **Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΒΑΓ καὶ γράφομεν τὰς περιφερείας, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο καὶ ἐφαπτομένας τῆς δοθείσης εἰς τὰ Β καὶ Γ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς των Μ;**

Τὰ κέντρα Δ καὶ Ε τῶν δύο περιφερειῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν

ἀκτίνων ΟΒ καὶ ΟΓ, τὰ δὲ τρίγωνα ΒΟΓ, ΒΔΑ, ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἰσογώνια· τὸ σχῆμα, ἄρα, ΑΔΟΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ΑΟ.

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδὴν τῶν περιφερειῶν καὶ ΜΘ = ΑΘ. Ἐπομένως, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς σταθερᾶς ἀποστάσεως τῶν Ο καὶ Α.



Σχ. 486.

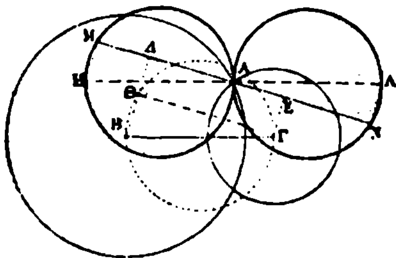
803. Παρατηρήσεις. 1) Ὁ ἀνωτέρω τόπος δὲν διαφέρει ἐκείνου τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΒΑΓ τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ σημείου Α εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας (Ο), ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς (Ο) μέρος τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΑΟ (§ 80).

2) Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόπον τοῦ σημείου Μ χρησιμοποιοῦντες μίαν γωνιακὴν σχέσιν. Πράγματι, ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΕ, ἡ δὲ ΔΜ συμμετρικὴ τῆς ΑΔ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΔΕ. Εἶναι λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΔΜΟΕ ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἀλλ' ἡ τελευταία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΜ καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΑΟΜ ὀρθή· ὁ τόπος, ἄρα, τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν ΟΑ.

Τόπος 185—I

804. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Β, Γ) φέρομεν τέμνουσαν αὐτῶν μεταβλητὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΑΜ, ΑΝ ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐπὶ τῆς τεμνούσης ὁριζομένων χορδῶν τῶν περιφερειῶν. Ποῖοι οἱ τόποι τῶν Μ καὶ Ν;



Σχ. 487.

Ἂν ἐκ τῶν κέντρων Β, Γ φέρωμεν καθέτους ΒΔ, ΓΕ ἐπὶ τὴν τέμνουσαν, τὸ μῆκος ΔΕ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐν λόγῳ χορδῶν.

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἐκ τοῦ σημείου Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ τέμνει τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΒΓ εἰς σημεῖον Θ τοιοῦτον ὥστε

$$ΓΘ = ΔΕ = ΑΜ = ΑΝ.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι οἱ τόποι τῶν σημείων Μ καὶ Ν εἶναι περιφέρειαι ἴσαι πρὸς τὴν ἔχουσαν διάμετρον ΒΓ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς εὐθείας ΑΗ, ΑΛ τοῦ σήχματος, τὰς τοιαύτας, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΗΑΛ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διπλασία αὐτῆς.

Τόπος 186

805. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ βάσις ΑΒ εἶναι σταθερά, καθὼς καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀπέναντι γωνίας Γ. Ἐκ τοῦ μέσου Ε μιᾶς τῶν μεταβλητῶν πλευρῶν φέρομεν κάθετον ΕΜ ἐπὶ τὴν ἄλλην. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Μ τῆς καθέτου ταύτης;

1η Ἀπόδειξις. Αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας καὶ ἥτις εἶναι σταθερά, ἀφοῦ ἡ γωνία Γ ἔχει σταθερὸν μέγεθος.

Ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς εὐθείας ΟΔ καὶ τῶν σημείων Δ, Β, Ε φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΓ καθὼς καὶ τὰς εὐθείας ΑΘ, ΔΖ καὶ ΘΜ· θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΘΜ ἔχει σταθερὸν μῆκος.

Ἐπειδὴ τὰ Δ, Ε εἶναι μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, θὰ ἔχωμεν:

ΑΛ = ΛΡ, ΡΜ = ΜΓ καὶ ΑΖ = ΖΓ.

Σχ. 488.

Τὰ τρίγωνα ΛΔΖ, ΜΕΓ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἴσα, ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ καὶ ἡ ΔΛ πρὸς τὴν ΕΜ·

ἄρα ΛΖ = ΡΜ = ΜΓ,

καὶ ἡ ΛΗ, οὖσα τὸ ἥμισυ τῆς ΛΖ, θὰ εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ΡΜ. Ἀλλ' εἶναι

$$ΑΛ = \frac{1}{2} ΑΡ$$

καὶ ἑπομένως

$$ΑΗ = \frac{1}{2} ΑΜ \quad \text{καὶ } ΑΘ = ΘΜ.$$

Ὁ τόπος δηλ. τοῦ σημείου Μ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Θ καὶ ἀκτῖνα ΑΘ.

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ σημεῖον Γ ἔλθῃ εἰς τὸ Β, τὸ σημεῖον Μ τοῦ τόπου συμπίπτει πρὸς αὐτό· ἀλλ' ὅταν τὸ Γ συμπέσῃ πρὸς τὸ Α, ἡ χορδὴ ΑΓ ἀποβαίνει ἡ ἐφαπτομένη ΑΝ τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ τὸ σημεῖον Μ λαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ ποδὸς Ν τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ καθέτου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτήν.

Οὕτω, τὸ τόξον ΒΜΑΝ τῆς περιφερείας (Θ, ΘΜ) εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ διὰ μεταβολὰς τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΑ τῆς περιφερείας (Ο). Τὸ δὲ τόξον ΝΝ'Β τῆς ἰδίας περιφερείας, εἶναι ὁ τόπος τοῦ Μ διὰ θέσεις τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ'Β τῆς περιφερείας (Ο).

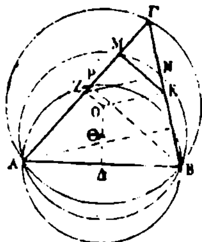
806. *2α Ἀπόδειξις.* Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις, μολονότι καθορίζει πλήρως τὸν ζητούμενον τόπον, ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι εἶναι μακρά. Ἡ ἑπομένη, ἀντιθέτως, εἶναι ταχυτέρα καὶ ἁπλουστέρα. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΜΒ διατηρεῖ σταθερὸν μέγεθος. Πράγματι, ὁσουδήποτε ὄντος τοῦ μήκους τῆς χορδῆς ΒΓ, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ μέσον της καὶ ἡ γωνία Γ σταθερά, καὶ ἡ γωνία ΒΜΑ θὰ παραμένῃ σταθερά· ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΡΓ μένει ὅμοιον, πάντοτε, πρὸς ἑαυτό. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν γωνίαν ΒΜΓ, ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα ΒΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ΒΡΓ τριγώνου.

Ἡ γωνία, ἑπομένως, ΒΜΑ μένει ἀμετάβλητος καί, κατ' ἀκολουθίαν, ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος μὲ χορδὴν ΑΒ, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ ζητουμένου τόπου.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις, στηριζομένη ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ὁμοίων σχημάτων, εὐκόλως ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σημεῖον Ε διαιρεῖ τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ δοθέντα λόγον (§ 1372).

Τόπος 186—I

807. Μὲ διάμετρον χορδὴν ΑΒ, δοθείσης περιφερείας ΑΒΓ, γράφομεν περιφέρειαν καὶ διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΑΡΓ τῶν δύο περιφερειῶν. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ, μεταξὺ τῶν περιφερειῶν, τμήματος ΡΓ τῆς τεμνούσης ταύτης;



Σχ. 480.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ζητήματος ἕπεται ἀμέσως, ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον Θ τῆς ΟΔ καὶ ἀκτῖνα ΑΘ.

Πράγματι, Ρ εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους ΒΡ καὶ Μ ὁ ποὺς τῆς καθέτου ΕΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

Τόπος 187

808. Δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Μ, εὑρισκομένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν περιφερείας, φέρομεν ἓν τυχὸν ζεῦγος καθέτων ἐπ' ἀλλήλας χορδῶν. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου τῶν ἄκρων τῶν χορδῶν αὐτῶν καὶ ποῖος ὁ τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Μ ἐπὶ τὰς πλευράς; (Σχ. 447).

Ἀναφερόμενοι εἰς μίαν προηγουμένην πρότασιν (§ 749), ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως τὸν τόπον αὐτόν, ὡς τὴν περιφέρειαν ΘΛΖΣ, μὲ κέντρον Ν, μέσον τοῦ σταθεροῦ τμήματος ΟΜ.

Τόπος 188

809. Δίδονται περιφέρεια καὶ διάμετρος αὐτῆς σταθερὰ ΑΒ. Ἐξ ἑνὸς τυχόντος σημείου Γ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΓΤ. Ποῖος ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΓΤ;

(Ἐκφώνησις Blanchet. Βλ. *Μέθοδοι*, § 82).

Τόπος 189

810. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος z; ([47])

Ἔστω Ο ἓν τυχὸν σημεῖον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κείμενον καὶ μ, ν, ρ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐὰν συμφωνήσωμεν, εἰς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Ο ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς νὰ προσδίδωμεν τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν σημεῖον, ἐὰν ἡ θέσις τοῦ σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον κεῖται πρὸς ὃ μέρος τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον ἢ πρὸς τὸ ἀντίθετον, εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὴν θέσιν τοῦ Ο εἰς τὸ σχῆμα 490 λ.χ. θὰ ἔχωμεν:

$$\mu + \nu - \rho = ΑΔ = \text{ὕψος}$$
τοῦ ἰσοπλ. τριγώνου.

Ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς προσθέσωμεν τὸ 2ρ τότε, λαμβάνομεν

$$\mu + \nu + \rho = ΑΔ + 2\rho = ΑΛ$$

Σχ. 400.

καὶ ἡ ἰσότης αὐτὴ θὰ ἀληθεύῃ διὰ πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῶν τμημάτων ΖΘ, ΗΙ καὶ Ι΄Ε τοῦ σχήματος, τῶν ἀγομένων παραλλήλως πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπ' αὐτῶν.

Τὴν ἰδίαν ἰδιότητα ἔχουν καὶ τὰ σημεῖα τῶν τμημάτων ΕΖ, ΘΗ καὶ Ι΄Ι. Ἐπειδὴ διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ΕΖ, λ.χ., ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ζ ἀπὸ τῆς ἰδίας πλευρᾶς, ἀφοῦ αἱ ΕΖ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος ΖΡ ἢ ρ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΕΒΖ.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα $\mu + \nu + \rho = ΑΛ = z$, εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἑξαγώνου ΕΖ ΘΗ ΙΙ΄. Διὰ τὴν κατασκευήν του, ἀρκεῖ νὰ ἀχθοῦν αἱ παράλληλοι ΖΘ κλπ. πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς ἀποστάσεις ἀπ' αὐτῶν $\rho = \frac{z - ΑΔ}{2}$.

811. Εἰς τὸ ἐρώτημα: *Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τυχόντος τριγώνου εἶναι δοθὲν μῆκος λ*, ἡ ἀπάντησις εἶναι ὅτι οὗτος ἀποτελεῖται πάλιν ἀπὸ τὴν περίμετρον ἑνὸς ἑξαγώνου ὡς τὸ προηγούμενον. Ἐν τούτοις, διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν σημείων Ε, Ζ, Θ κλπ. πρέπει νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς κατασκευὴν τοῦ ΙΙΙ βιβλίου καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τῶν *ἀναλόγων τμημάτων* διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι

---

47. Σημ. μετ. Μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου.

διὰ πᾶν σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ ἑξαγώνου ΕΖΘΗΙΓ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ (Βλ. § 74).

Σημείωσις. Σχετικὴ ἀναλυτικὴ μελέτη εἰς N. A. 1876, σ. 367, Moret - Blanc.

Πρόβλημα 190

812. 1) Μία τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας κυλίεται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας ἐνῷ ἡ κορυφὴ αὐτῆς γράφει ἄλλην περιφέρειαν, ὁμόκεντρον τῆς πρώτης. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 122).

2) Ὁμοίως, ἀλλ' *ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι τυχοῦσα.*

Ἡ περιβάλλουσα εἶναι πάλιν περιφέρεια ὁμόκεντρος τῶν δύο ἄλλων.

Πρόβλημα 191

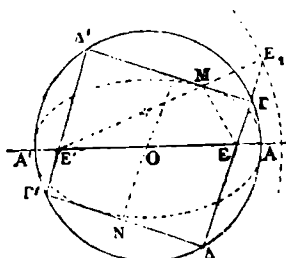
813. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία δοθεῖσα κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 123).

Σημείωσις. Ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος, εἶναι παραβολή. (G., nº 1015, καὶ ἐπμ. § 2171).

Πρόβλημα 191—I

814. Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου ΓΔΓ'Δ' ἐγγεγραμμένου εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν κινοῦνται ἐπ' αὐτῆς, ἐνῷ ἡ πλευρὰ ΓΔ διέρχεται σταθερῶς διὰ δοθέντος σημείου Ζ. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς Γ'Δ';



Σχ. 401.

Ἀνάγεται αὕτη εἰς τὸ σημεῖον Ζ', συμμετρικὸν τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὸ κέντρον. Δηλ. ἡ πλευρὰ Γ'Δ' διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ αὐτοῦ σημείου Ζ'.

Παρατήρησις. Ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν ΓΔ', ΔΓ' εἶναι ἡ ἔλλειψις μὲ μέγαν ἄξονα ΑΑ' (§ 127).

Πρόβλημα 191—II

815. Ποία ἡ περιβάλλουσα μιᾶς περιφερείας δοθείσης ἀκτῖνος καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 131).

Χρῆσις γωνιακῆς σχέσεως.

Τόπος 192

816. Τρίγωνον ΑΒΜ ἔχει ὡς βάσιν τὴν σταθερὰν χορδὴν ΑΒ δοθείσης περιφερείας, ἐνῷ ἡ κορυφή του Μ κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ὑπὸ τῆς ΑΒ ὑποτεινομένων τόξων.

1) Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

2) Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ὑψῶν του;

1) Ἀφοῦ ἡ γωνία εἰς τὸ Μ εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β θὰ εἶναι σταθερόν, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμίσεών των μ καὶ ν.

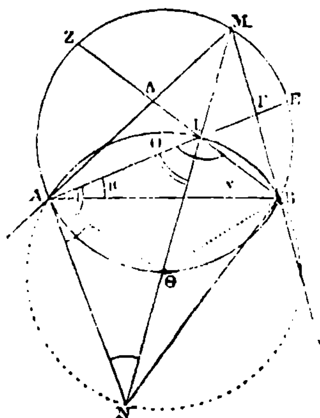
Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΙΒ, ἐπομένως, ἡ γωνία Ι εἶναι σταθερὰ καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ι εἶναι τὸ τόξον ΑΙΒ, μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{I}$, δηλ. τὴν παραπληρωματικὴν τοῦ ἀθροίσματος μ + ν. Ἐπειδὴ

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{M}=2 \text{ ὀρθαὶ}$$

καὶ

$$\widehat{\mu}+\widehat{\nu}+\frac{\widehat{M}}{2}=1 \text{ ὀρθή, ἕπεται}$$

$$\widehat{I}=1 \text{ ὀρθὴ}+\frac{\widehat{M}}{2}.$$



Σχ. 192

Τὸ τόξον ΑΙΒ εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· τὸ ἐστιγμένον συμπλήρωμα αὐτοῦ εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β.

2) Ἡ γωνία τῶν ἐκ τῶν Α καὶ Β ὑψῶν εἶναι σταθερά, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς $\widehat{M}$. Ὁ τόπος ἐπομένως τοῦ σημείου τομῆς των, εἶναι ἕνα κυκλικὸν τόξον ΑΗΒ, διερχόμενον διὰ τῶν Α, Η καὶ Β.

Τὸ τόξον τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν συμμετρικὴν τῆς δοθείσης ΑΜΒ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ.

Παρατήρησις. Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΑΙΒΝ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΘΒ:

$$\Theta I=\Theta A=\Theta B.$$

Πράγματι, Θ εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ διχοτόμος ΜΙΝ τέμνει τὸ τόξον ΑΘΒ, δηλ. τὸ μέσον αὐτοῦ καὶ Ε τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΕΜ· αἱ γωνίαι, ἄρα, ΘΑΙ καὶ ΘΙΑ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰ αὐτὰ μέτρα, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΙ ἰσοσκελές.

Ἐπομένως, ΘΑ = ΘΙ.

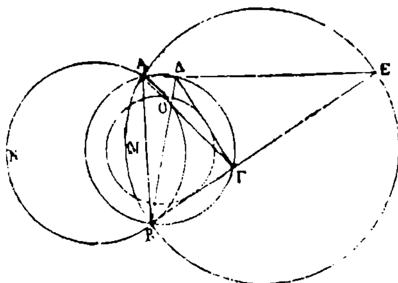
Τὸ τρίγωνον ΑΘΝ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές, ἀφοῦ αἱ γωνίαι του εἰς τὰ Ν καὶ Α ἔχουν ἴσα συμπληρώματα· κατὰ συνέπειαν,

ΘΑ = ΘΝ = ΘΙ,

καὶ τὸ σημεῖον Θ, μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΝΙ, εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΑΝΒΙ.

Τόπος 193

817. Ἔστωσαν ΑΒ σταθερὰ χορδὴ περιφερείας καὶ ΓΔ ἄλλη μεταβλητῆς θέσεως ἀλλὰ σταθεροῦ μήκους. Ποῖοι οἱ τόποι τῶν σημείων τομῆς τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ;



Σχ.

Ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι σταθερά, ἐπειδὴ τὸ μέτρον της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΓΔ, ἅτινα δὲν μεταβάλλονται κατὰ τὰ μήκη των.

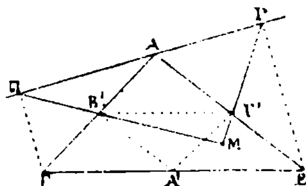
Ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι σταθερὰ ἐπίσης, ἀφοῦ τὸ μέτρον της ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἰδίων τόξων.

Ἕκαστος, ἐπομένως, τῶν ζητουμένων τόπων εἶναι τόξον κύκλου, διερχόμενον διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ὡρισμένην.

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΔΓ τέμνωνται, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὰς ὡς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

Τόπος 193—I

817 α. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Α', Β', Γ' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Διὰ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἐκ δὲ τῶν Β καὶ Γ τὰς καθέτους ΒΡ καὶ ΓΠ ἐπ' αὐτήν. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ΡΓ'Μ καὶ ΠΒ'Μ; Pruvost, G. Anal. σ. 553.



Σχ. 404.

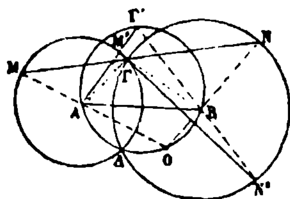
Τὰ τρίγωνα ΑΓ'Ρ καὶ ΑΒ'Π εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἡ γωνία Β'ΜΓ' ἴση πρὸς ΒΑΓ = Β'Α'Γ', ὡς εὐκόλως ὑπολογίζεται. Ἐπομένως, τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ διάμεσον τρίγωνον Α'Β'Γ' τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

Παρατήρησις. Ἄλλη ἀπόδειξις εἰς Bul. d. Math. Élém., 1895—96, σ. 3.

Τόπος 194

818. Διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), φέρομεν τυχοῦσαν κοινὴν τέμνουσαν αὐτῶν ΜΓΝ καὶ συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα τομῆς Μ, Ν μὲ τὰ ἀντίστοιχα κέντρα Α, Β. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν εὐθειῶν ΜΑ καὶ ΝΒ; (Concours général, 1873).

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ· ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΜΑΓ καὶ ΝΒΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν εἰς τὰ Μ καὶ Ν καὶ ἴση, ἑπομένως, πρὸς τὴν γωνίαν ΑΟΒ. Ὁ τόπος, ἄρα, τοῦ σημείου Μ εἶναι τόξον περιφερείας διερχόμενον διὰ τῶν Α, Β καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΑΓΒ ἢ τὴν ΑΔΒ.



Σχ. 495.

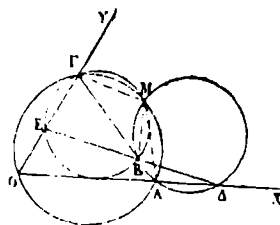
Παρατηρήσεις. 1η. Τὸ τόξον τοῦτο διέρχεται διὰ τοῦ Δ.

2α. Διὰ τὴν τέμνουσαν Μ'ΓΝ', τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΜ' καὶ ΒΝ' εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ'Β τῆς περιφερείας ΑΟΒ.

Τόπος 195

819. Διὰ σημείου Β, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ κειμένου, φέρομεν μίαν σταθερὰν τέμνουσαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, τὴν ΑΒΓ, καὶ μίαν μεταβλητὴν ΔΒΕ καὶ περιγράφομεν, ἀκολούθως, περιφερείας εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΕΓΒ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν;

Ἂς συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Μ μετὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων τῆς σταθερᾶς τεμνούσης. Ἐπειδὴ



Σχ. 496

$$\widehat{AMB} = \widehat{A\Delta B}, \quad \widehat{BM\Gamma} = \widehat{BEO},$$

ἕπεται

$$\widehat{AM\Gamma} = \widehat{O\Delta E} + \widehat{OE\Delta} = 2 \text{ ὀρθαί} - \widehat{\Delta OE},$$

δηλ. ὅτι ἡ γωνία ΑΜΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΧΟΥ. Ὁ ζητούμενος ἑπομένως τόπος εἶναι ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ σταθερὸν τρίγωνον ΑΟΓ.

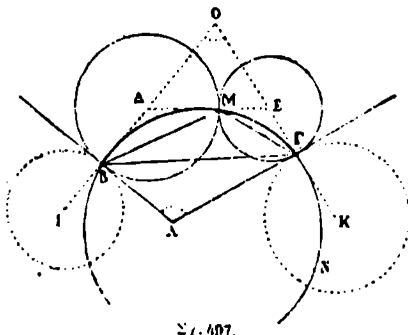
Παρατήρησις. Ὁ τόπος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Β ἐπὶ τῆς σταθερᾶς τεμνούσης. Εὑρίσκεται ἄλλωστε εὐκόλως καὶ ὡς ἄμεσος συνέπεια ἑνὸς προηγουμένου θεωρήματος (§§ 711 καὶ 711α).

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα ἐχρησίμευσεν ὡς βάσις μιᾶς ἐξαιρέτου μελέτης: *Les Lieux géométriques en Géométrie Élémentaire* (nº 64, σ. 39), ὑπὸ P. Sauvage, 1893.

Τόπος 196

820. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἄνισον ἀπέχοντα τῆς κορυφῆς Α. Θεωροῦμεν τὰς περιφερείας (Δ) καὶ (Ε), ἐφαπτομένας ἀλλήλων εἰς τὸ Μ καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς τὰ Β καὶ Γ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ; (Endrès, *Manuel des Ponts et chaussées*, 6η ἐκδ., τόμ. I, σ. 309).

Φέρομεν τὰς ΜΒ, ΜΓ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ, ὡς ἔχον δύο



Σχ. 407.

γωνίας ὀρθάς, ἔχει τὰς γωνίας Α καὶ Ο παραπληρωματικάς.
Ἀφ' ἑτέρου, τὰ τρίγωνα ΒΔΜ, ΓΕΜ εἶναι ἰσοσκελῆ· ἄρα

$$\Delta\widehat{B}M = \frac{1}{2}\, M\widehat{\Delta}O,$$

$$E\widehat{M}\Gamma = \frac{1}{2}\, M\widehat{E}O$$

καὶ ἐπειδή :

$$B\widehat{M}\Gamma = 180^\circ - (\Delta\widehat{M}B + E\widehat{M}\Gamma) = 180^\circ - \frac{\widehat{\Delta}}{2} - \frac{\widehat{E}}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{\Delta}+\widehat{E}}{2}\right)$$

καὶ

$$\frac{\widehat{\Delta}+\widehat{E}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{O}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2},$$

ἕπεται

$$B\widehat{M}\Gamma = 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = \text{σταθερά}.$$

Εἶναι ἄρα ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ κυκλικὸν τόξον ΒΜΓ, διερχόμενον διὰ τῶν Β, Γ καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν $180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$.

Παρατήρησις. Τὸ τόξον ΒΝΓ εἶναι ὁ τόπος τοῦ Μ δι' ἐσωτερικὴν ἐπαφὴν τῶν περιφερειῶν (Δ) καὶ (Ε). (Βλ. ἐπμ., §§ 959 — 964).

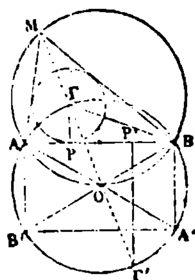
Τόπος 196—Ι

821. Ὁμοίως, ἀλλ' αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ἔχουν ἀντικατασταθῆ διὰ περιφερειῶν (Ι), (Κ), ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐδόθησαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Β καὶ Γ.

Φέροντες τὰς ἐφαπτομένας ΒΑ καὶ ΓΑ, ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Τόπος 197

822. Ἐξ ἑνὸς τυχόντος σημείου Γ κυκλικοῦ τόξου ΑΓΒ, φέρομεν κάθετον ΓΡ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΡ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (Γ);



Σχ. 498.

Ἂς συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὸ κέντρον Γ μετὰ τῶν σημείων Α, Β, Μ.
Ἐπειδὴ

$$\widehat{A\Gamma B} = 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)$$

καὶ

$$\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{M}}{2},$$

ἕπεται

$$\widehat{A\Gamma B} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{M}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{M}}{2},$$

$$\frac{\widehat{M}}{2} = \widehat{A\Gamma B} - 90^\circ, \qquad \widehat{M} = 2(\widehat{A\Gamma B}) - 180^\circ = \text{σταθερά},$$

ἀφοῦ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι σταθερά. Ὥστε, ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι κυκλικὸν τόξον διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν $2\widehat{A\Gamma B} - 180^\circ$.

Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὸν τόπον ἀνήκουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὡς ἀντίστοιχα τῶν περιπτώσεων κατὰ τὰς ὁποίας μηδενίζεται ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας (Γ).

2) Τὸ ζήτημα δύναται νὰ μελετηθῇ καὶ διὰ θέσεις τοῦ κέντρου Γ ἐπὶ τοῦ τόξου Α'Γ'Β' ἢ ἐπὶ τῶν ΑΒ' καὶ ΒΑ' τόξων.

Τόπος 198

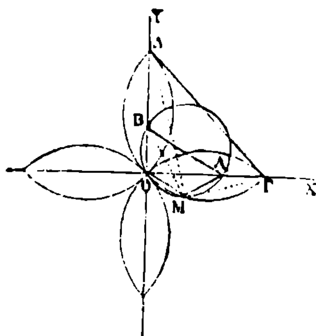
823. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀρθῆς γωνίας ΧΟΥ λαμβάνομεν δύο τμήματα ΟΑ, ΟΒ μὲ ἄθροισμα μηκῶν σταθερὸν λ καὶ περιγράφομεν περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΟ. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ δευτέρου κοινοῦ σημείου τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ο παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ; (Concours académique, 1877).

Ἔστω $OA + OB = \lambda$.

Ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ λαμβάνομεν ἴσα τμήματα ΟΓ = ΟΔ = λ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΓ, ΜΔ. Ἐπειδὴ

$$ΜΑ = ΟΒ = ΑΓ, \quad ΟΑ = ΜΒ = ΒΔ,$$

τὰ τρίγωνα ΜΑΓ, ΜΒΔ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ μὲ γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν ἴσας, ὡς παραπληρωματικὰς τῶν ἴσων γωνιῶν ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ. Ἑπομένως



Σχ. 400.

$$\widehat{ΟΓΜ} = \widehat{ΟΔΜ}$$

καὶ τὰ τέσσαρα σημεῖα Ο, Μ, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

Κατ' ἀκολουθίαν, ὁ τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι ἡ ἡμιπεριφέρεια μὲ διάμετρον ΓΔ.

Παρατηρήσεις. 1) Ὁ πλήρης τόπος, διὰ τὰς τέσσαρας περὶ τὸ Ο γωνίας, ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν.

2) Ἐὰν ἡ γωνία ΧΟΥ δὲν εἶναι ὀρθή, ὁ τόπος, διὰ θέσεις τῆς ΑΒ ἐντὸς τῆς ΧΟΥ, εἶναι κυκλικὸν τόξον διερχόμενον διὰ τῶν Γ, Δ καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς τὴν ΔΟΓ. Ὁ δὲ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων, ἴσων ἀνὰ δύο, τόξων.

824. *Ἐπέκτασις.* VIII Βιβλίον. Ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι παραβολή, ἐφαπτομένη τῶν ἀξόνων εἰς τὰ Γ καὶ Δ, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ γωνία ΧΟΥ (§§ ἐπμ. 2165, 2170). Ἐπειδὴ δὲ ἡ περιφέρεια ΑΟΒ εἶναι ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν ἐφαπτομένων ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ τῆς παραβολῆς, διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας αὐτῆς. Ἄλλως: αἱ περιφέρειαι ΑΟΒ διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.

Τόπος 199

825. Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἑνὸς ἀμεταβλήτου τριγώνου ΑΒΓ ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ, τεμνομένων κατὰ γωνίαν παραπληρωματικὴν τῆς $\widehat{Α}$. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α;

Διερευνήσατε τὸ πρόβλημα ὑποθέτοντες, ὅτι ἡ κορυφὴ Β δύναται νὰ λαμβάνῃ θέσεις καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΟΧ' τῆς ΟΧ, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Γ διαγράφει τὴν εὐθεῖαν ΥΟΥ'.

Ἔστω ΑΒΓ μία τυχοῦσα θέσις τοῦ κινητοῦ τριγώνου.

Ἕνεκα τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΧΟΥ καὶ ΒΑΓ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἑπομένως

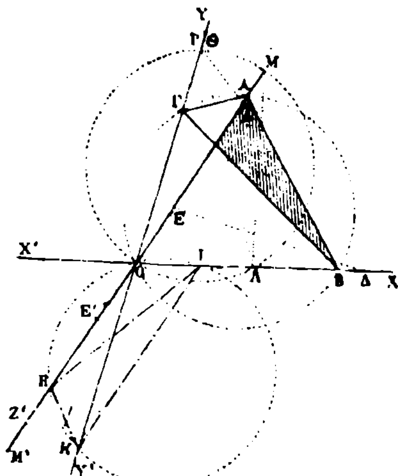
$$\text{γων. } ΑΟΧ = ΑΓΒ.$$

Ὁ τόπος ἄρα τοῦ σημείου Α εἶναι εὐθεῖα (ε), διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ σχηματίζουσα πρὸς τὴν ΟΧ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν Γ τοῦ τριγώνου, ἢ πρὸς τὴν ΟΥ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν Β αὐτοῦ.

826. *Διερεύνησις.* Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τόπος δὲν ἀποτελεῖται

ἐκ πάντων τῶν σημείων τῆς εὐθείας (ε), ἀφοῦ ἡ κορυφὴ Α δὲν δύναται νὰ ἀπομακρυνθῇ τοῦ σημείου Ο πέραν ὡρισμένων ὁρίων.

Ἂς τοποθετήσωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ ἐπὶ τῆς ΟΧ, κατὰ τὴν θέσιν ΔΕΟ τοῦ τριγώνου. Διὰ τὴν γωνίαν ΧΟΥ, ἡ θέσις Ε εἶναι μία ὁριακὴ θέσις τῆς κορυφῆς Α· εἰς τὴν θέσιν ΛΜΡ τοῦ τριγώνου, καθ' ἣν ἡ ΜΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΧ, ἄρα καὶ ἡ ΜΡ ἐπὶ τὴν ΟΥ, τὸ σημεῖον Α καταλαμβάνει τὴν θέσιν Μ, δευτέραν ὁριακὴν θέσιν αὐτοῦ. Εἶναι δὲ τότε ἡ ἀπόστασις ΟΜ ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Ἀπὸ τοῦ σημείου Μ, ἡ κορυφὴ Α κατέρχεται μέχρι τοῦ σημείου Ζ, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν θέσιν ΟΖΘ, τοῦ κινητοῦ τριγώνου καθ' ἣν ἡ πλευρὰ ΒΓ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΥ.

Γωνία ΧΟΥ'. Ὅταν αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΟΧ καὶ ΟΥ' ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον Α ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, διέρχεται διὰ τῶν Ο καὶ Η σημείων τοῦ σχήματος καὶ καταλήγει εἰς τὴν ὁριακὴν θέσιν Ζ', διὰ τὴν ὁποίαν ΟΖ' = ΟΖ.

Γωνία Χ'ΟΥ'. Συνεχιζομένης τῆς κινήσεως, τὸ σημεῖον Α ἀνέρχεται μέχρι τοῦ Μ', ἐπαναδιέρχεται διὰ τῶν Ζ' καὶ Η καὶ καταλήγει εἰς Ε'.

Γωνία Χ'ΟΥ. Ἡ κορυφὴ Α ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ Ε', διέρχεται διὰ τῶν Ο, Ε καὶ καταλήγει εἰς Ζ.

Γράφει κατὰ ταῦτα ἡ κορυφὴ Α, κατὰ τὴν κίνησιν τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΧΟΧ', ΥΟΥ', δύο φορὰς τὸ τμῆμα ΜΟΜ' τῆς εὐθείας (ε).

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ διατύπωσις τοῦ προβλήματος θὰ ἠδύνατο νὰ συμπληρωθῇ ἐὰν ἐθεωρῶμεν τὴν γωνίαν Α ἀδιαφόρως παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας Ο ἢ ἴσην πρὸς αὐτήν. Ἐπειδὴ $\widehat{XOY'} = \widehat{A}$.

2) Ὅταν ἡ γωνία Α δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΧΟΥ ἢ τὴν παραπληρωματικὴν αὐτῆς ΧΟΥ', ὁ τόπος τοῦ σημείου Α εἶναι μία ἔλλειψις (§ 144) καὶ τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ γενικωτέρου τούτου.

Διὰ $\widehat{A} \rightarrow 180^{\circ} - \widehat{XOY}$, ἡ ἐν λόγῳ ἔλλειψις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλατύνεται κατὰ τὸν μέγαν ἄξονά της καὶ εἰς τὸ ὅριον ἀποβαίνει ὁ μέγας αὐτῆς ἄξων ΜΟΜ', διαγραφόμενος δύο φορὰς ὑπὸ τοῦ σημείου Α κατὰ τὴν ὅλην κίνησιν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Διάφοροι ἀποστάσεις

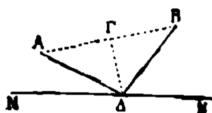
827. Ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας παρέχεται διὰ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ περιφερείας εἶναι τὸ τμῆμα τῆς ἀκτῖνος, ἢ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς περιφερείας.

Ἡ ἀπόστασις δύο περιφερειῶν μετρεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Πρόβλημα 200

828. Δύο χωρία Α καὶ Β εὑρίσκονται πλησίον μιᾶς εὐθυγράμμου σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ΜΝ καὶ πρέπει νὰ ἐξυπηρετηθοῦν δι' ἑνὸς σταθμοῦ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπ' αὐτῶν εὑρισκομένου. Ὁρίσατε τὴν θέσιν τοῦ σταθμοῦ ἐπὶ τῆς γραμμῆς.



Σχ. 501

Εἶναι τὸ σημεῖον Δ, τομὴ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΜΝ.

Πρόβλημα 201

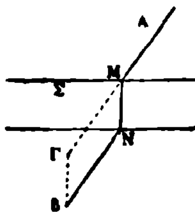
829. Ποταμός, μὲ ροῦν εὐθύγραμμον εἰς ὡρισμένην περιοχήν, διέρχεται μεταξὺ δύο τοποθεσιῶν αὐτῆς εἰς ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ρεύματος κειμένας. Εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ ζευχθῇ ὁ ποταμὸς διὰ γεφύρας, καθέτου ἐπὶ τὰς ὄχθας του, εἰς τρόπον ὥστε οἱ δύο τόποι νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων εἰσόδων τῆς γεφύρας;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 137).

Πρόβλημα 201—I

830. Τὰ αὐτὰ δεδομένα: Ζητεῖται ἡ βραχυτέρα δυνατὴ ὁδὸς ἡ συνδέουσα τοὺς δύο τόπους. (Ν. Α. (1846), σ. 45).

Λαμβάνομεν τὴν ἀπόστασιν ΒΓ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὸ εὖρος ΜΝ τοῦ ποταμοῦ, φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ, εἰς ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν πλησιεστέραν πρὸς τὸ Α ὄχθην, φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῶν ὄχθῶν. Ἡ βραχυτέρα ὁδὸς εἶναι:



Σχ. 502

$$ΑΜ + ΜΝ + ΒΝ = ΑΓ + ΒΓ.$$

Πράγματι, πᾶσα ἄλλη ὁδὸς θὰ εἶναι μακροτέρα· ἐπειδὴ θὰ ἀναλύεται εἰς τὸ τμῆμα ΒΓ καὶ εἰς μίαν τεθλασμένην γραμμὴν συνδέουσαν τὰ σημεῖα Γ καὶ Α.

831. ***Σημ.*** 1) Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις ΑΜ, ΒΝ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, τὸ σημεῖον Μ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τόπου τῶν σημείων τῶν ὁποίων ὁ

λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ Α καὶ Γ εἶναι ὁ δοθείς, καὶ ἐπὶ τῆς ὄχθης Σ. Ὑπάρχουν δύο λύσεις.

2) Εἰς τὸ ἐρώτημα: ποία ἡ ὁδὸς μεταξὺ Α καὶ Β δοθέντος μήκους 2α, ἡ ἀπάντησις δίδεται διὰ τοῦ VIII Βιβλίου:

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς εὐθείας ΣΜ *καὶ ἐλλείψεως, ἐχούσης τὰ* Α *καὶ* Γ *ὡς ἑστίας καὶ μῆκος μεγάλου ἄξονος* 2α (G., nº 642).

Πρόβλημα 202

832. Ἐκ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ δύο ἄλλων σημείων Β καὶ Γ.

1) Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸ Α μετὰ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

2) Διὰ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

Πρόβλημα 202—I

833. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων.

Διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο σημείων φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

Πρόβλημα 202—II

834. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴσον ἀπέχουσα ἀπὸ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.

Εἶναι αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἀνὰ δύο τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῶν δοθέντων σημείων.

Ὑπάρχουν τρεῖς τοιαῦται εὐθεῖαι.

Πρόβλημα 203

835. Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο ἄλλων σημείων ἀπ' αὐτῆς νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος λ.

Πρῶτος τρόπος. Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω

$$ΒΜ + ΓΝ = λ.$$

Λαμβάνοντες $ΜΔ = ΓΝ$, παρατηροῦμεν ὅτι $ΒΔ = λ$ καὶ

$$γων.\ ΒΔΓ = 90^{o}.$$

Σχ. 503.

Ἐπομένως, ἂν κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΒΓ καὶ θεωρήσωμεν τὰς τομάς της Δ, Δ' μετὰ τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα λ, αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν εὐθεῖαι ΔΓ, Δ'Γ μᾶς καθορίζουν τελείως τὴν διεύθυνσιν τῆς ζητουμένης ἐκ τοῦ Α εὐθείας.

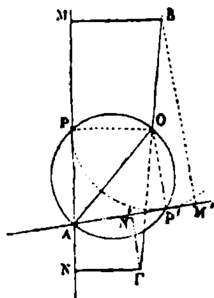
Παρατηρήσεις. 1) Ἡ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ εὐθεῖα ΑΜ ἀντιστοιχεῖ

εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων, ἐνῷ ἡ ΑΜ' εἰς τὴν διαφοράν. πράγματι

$$ΒΜ' - ΓΝ' = ΒΔ' = λ.$$

2) Δύο ἄλλας λύσεις λαμβάνομεν διὰ τῶν τομῶν Ε, Ε' τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΒΓ καὶ τῆς ἐχούσης κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα λ.

Δεύτερος τρόπος (Σχ. 504). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἀπὸ τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ΒΜ καὶ ΓΝ ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος λ, ἡ γνωστὴ ἰδιότης τῆς μέσης βάσεως ἑνὸς τραπεζίου ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἑπομένην κατασκευήν.



Σχ. 504

Μὲ διάμετρον τὴν συνδέουσαν τὸ Α μετὰ τοῦ μέσου Ο τῆς ΒΓ εὐθεῖαν γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν γραφομένην μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $\frac{λ}{2}$, εἰς τὰ Ρ,Ρ'.

Ἡ εὐθεῖα ΑΡ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· ἐπειδὴ

$$ΒΜ + ΓΝ = 2 . ΡΟ = λ.$$

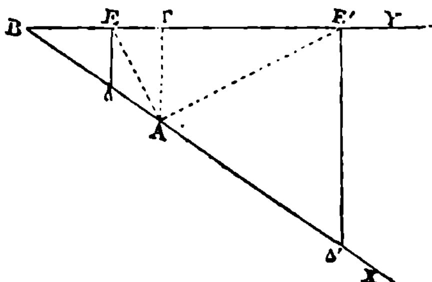
Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὸ ἄθροισμα ἀντιστοιχεῖ ἡ εὐθεῖα ΑΡ, ἀφίνουσα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς αὐτὴν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἡ ΑΡ' ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διαφοράν, ἀφοῦ

$$ΒΜ' - ΓΝ' = 2\ ΟΡ' = λ.$$

2) Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει ἕξ λύσεις: ἀθροίσματα ἢ διαφοράς (48).

Πρόβλημα 203—I

836. Δοθέντος ἑνὸς σημείου Α ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν μιᾶς δοθείσης



Σχ. 505.

γωνίας Β, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς σημεῖον ἴσον ἀπέχον τοῦ δοθέντος σημείου καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας.

---

48. Σημ. μετ. Δι' ἐναλλαγῆς τοῦ ρόλου τῶν σημείων Α, Β, Γ.

Φέρομεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΥ.

Αἱ διχοτόμοι ΑΕ, ΑΕ' τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΓΑΧ ὁρίζουν μετὰ τῆς ΒΥ τὰ σημεῖα Ε, Ε'. Αἱ εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΥ τέμνουν τὴν ΒΧ κατὰ τὰ ζητούμενα σημεῖα· ἐπειδὴ

$$ΔΑ = ΔΕ, \quad Δ'Α = Δ'Ε',$$

ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΔ'Ε' εἶναι ἰσοσκελῆ.

Πρόβλημα 203—ΙΙ

837. Δίδονται περιφέρεια, εὐθεῖα καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἕτερον σημεῖον Β ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆς περιφερείας κείμενον.

Ἔστω Β τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ΒΑ = ΒΓ.

Ἂν καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν θέσιν τοῦ σημείου Γ. Διὰ τοῦτο, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ. Τὸ σχηματιζόμενον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΒΟ εἶναι εὐκόλως κατασκευάσιμον, ἀφοῦ ΑΔ = ρ, καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΟΔ μᾶς παρέχει ἀμέσως τὴν κορυφὴν Β.

Σχ. 506.

Παρατήρησις. Ὑπάρχουν δύο, ἐν γένει, λύσεις· ἐπειδὴ τὸ μῆκος ρ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν καὶ εἰς τὴν θέσιν ΑΕ.

Πρόβλημα 204

838. Ἐκ σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴσον ἀπέχουσα δοθέντος σημείου Β καὶ δοθείσης περιφερείας (Γ).

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν, ἀπὸ τῆς ὁποίας αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Γ καὶ Β ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς ρ (§ 835).

Πρόβλημα 204—Ι

839. Ἐξ ἑνὸς σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴσον ἀπέχουσα δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

1) Ἔστωσαν Β, Γ, β, γ τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν. Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν, ἀπὸ τῆς ὁποίας αἱ ἀποστάσεις τῶν Β καὶ Γ ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς β — γ (§ 835).

2) Διὰ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς μίαν τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο περιφερειῶν. Τὸ πρόβλημα, ἑπομένως ἐπιδέχεται τέσσαρας ἐν γένει λύσεις.

Πρόβλημα 204—ΙΙ

840. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴσον ἀπέχουσα τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

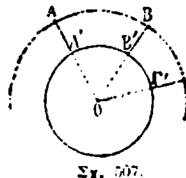
Ἕκαστον ζεῦγος περιφερειῶν ἔχει, εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, τέσσαρας κοινὰς ἐφαπτομένας καὶ ἑπομένως ὑπάρχουν δώδεκα

κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων. Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἑκάστην κοινὴν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς αὐτὴν καὶ ἀπαντῶσαι εἰς τὰ αἰτούμενα, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν εἴκοσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἐν γένει, ἰσαπέχουσαι τῶν τριῶν περιφερειῶν.

Παρατήρησις. Ἡ διερεύνησις εἶναι ἐνδιαφέρουσα καὶ δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν.

Πρόβλημα 204—III

841. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ καὶ διερχομένη εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ.



Σχ. 507.

Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον μετὰ τῆς διερχομένης διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων.

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καθὼς καὶ τὸ ἑπόμενον, δύναται νὰ ἔχῃ ὀκτὼ λύσεις. Θὰ ἐξετάσωμεν ἀργότερον (§ 1536 α) μίαν είδικὴν περίπτωσιν, παραδόξου πως ἐμφανίσεως:

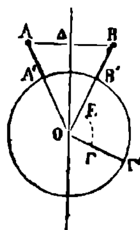
Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τριῶν σημείων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κειμένων.

Πρόβλημα 205

842. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια εἰς ἴσας ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεις διερχομένη καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀπόστασις ἑκάστου τῶν σημείων ἀπὸ τῆς περιφερείας νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

Γράφομεν, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (Σχ. 507), τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑ κλπ., τμήματα ΑΑ', ΑΑ'', ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ. Οὕτω ἔχομεν δύο λύσεις, τὰς περιφερείας Α'Β'Γ' καὶ Α''Β''Γ''.

843. *Παρατηρήσεις*. 1) Ἐὰν τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐκτὸς τῆς ζητουμένης περιφερείας ἢ ἐντὸς ἢ καὶ ἐπ' αὐτῆς, ὑπάρχουν δύο μόνον, ἐν γένει λύσεις τοῦ προβλήματος. Τὸ γενικὸν ὅμως πρόβλημα, ἐπιδέχεται καὶ *ἐξ ἄλλας λύσεις*· ἐπειδὴ δύο τῶν δοθέντων σημείων δύνανται νὰ εἶναι ἐσωτερικὰ τῆς περιφερείας καὶ ἓν ἐξωτερικὸν ἤ, ἀντιστρόφως, δύο ἐξωτερικὰ καὶ ἓν ἐσωτερικόν.



Σχ. 508.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω (Σχ. 508):

$$AA' = BB' = \Gamma\Gamma'.$$

Τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν ἐπὶ τῆς ΔΟ, καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, σημείου Ο τοιούτου, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2 λ.

Τὸ δεύτερον ὅμως τοῦτο πρόβλημα ἀνήκει εἰς τὸ VIII Βιβλίον

καὶ ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν σημείων τομῆς εὐθείας ΔΟ καὶ ὑπερβολῆς, ἐχούσης ὡς ἑστίας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ μῆκος ἑστιακοῦ ἄξονος 2 λ (§ 113, β).

2) Τὸ ἴδιον πρόβλημα ἀνάγεται ἐπίσης εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας ἐφαπτομένης τριῶν ἴσων περιφερειῶν, μὲ κέντρα τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ ἀκτῖνα λ. Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται ὀκτώ, ἐν γένει, λύσεις.

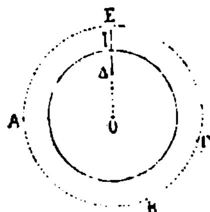
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ τρία σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, δύο τῶν ὀκτὼ κύκλων τῆς γενικῆς λύσεως ἀποβαίνουν αἱ δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τριῶν ἴσων περιφερειῶν μὲ κέντρα Α, Β, Γ.

3) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ἡ ἀνάγκη τῆς προσοχῆς μετὰ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν προβλημάτων, ἵνα δυνάμεθα νὰ ἀποφαινόμεθα, ἑκάστοτε, ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν λύσεων αὐτῶν.

Πρόβλημα 205—I

844. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ, μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.

Κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τριῶν τυχόντων ἐκ τῶν δοθέντων σημείων, τῶν Α, Β, Γ λ. χ. Φέρομεν ἀκολούθως τὴν ΟΔ, τέμνουσαν τὴν ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε, καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ι τοῦ τμήματος ΕΔ. Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΙ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 509.

Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν δοθέντων σημείων δύναται νὰ ληφθῇ αὐθαιρέτως ὡς τέταρτον σημεῖον, ὑπάρχουν ἐν γένει τέσσαρες περιφέρειαι πληροῦσαι τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσεις καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τρία τῶν δοθέντων σημείων κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἀλλὰ τότε μία τῶν τεσσάρων περιφερειῶν ἀφανίζεται.

844 α. ***Σημείωσις.*** Ἡ πλήρης διερεύνησις τοῦ προβλήματος δὲν παρουσιάζει δυσκολίας καὶ εὑρίσκεται ἀνεπτυγμένη εἰς τὸ ἔργον τοῦ G. Lemaire *Méthodes de résolution et de discussion de Problèmes de Géométrie* (1904).

Πρόβλημα 206

845. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον μῆκος α ἀπὸ δύο εὐθειῶν ἢ περιφερειῶν.

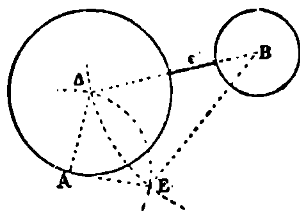
Δι' ἑκάστην τῶν δοθεισῶν γραμμῶν κατασκευάζομεν τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν α. Αἱ τομαὶ τῶν τόπων αὐτῶν παρέχουν τὰ ζητούμενα σημεῖα, τέσσαρα ἐν γένει, δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

Παρατήρησις. Ἕκαστον τῶν ὡς ἄνω σημείων δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κέντρον περιφερείας ἀκτῖνος α καὶ ἐφαπτομένης τῶν δύο γραμμῶν.

Πρόβλημα 206—I

846. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τῆς ὁποίας ἡ μικροτέρα ἀπόστασις ἀπὸ δοθείσης περιφερείας (Β) νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος ε.

Ἡ ἀπόστασις ΒΔ τῶν δύο κέντρων πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ηὐξημένον κατὰ τὸ μῆκος ε. Τὸ κέντρον Δ, ἑπομένως, πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Π_1) μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα $ΒΔ = ε + ρ' + ρ$.



Σχ. 510.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου Α, τὸ κέντρον της Δ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Π_2) μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ρ.

Οἱ δύο τόποι (Π_1) καὶ (Π_2) τέμνονται εἰς δύο, ἐν γένει, σημεῖα Δ καὶ Ε· ἕκαστον τούτων εἶναι τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας πληρούσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Τέμνουσαι

847. Τὰ προβλήματα ἐπὶ τῶν τεμνουσῶν εἶναι πολυάριθμα καὶ ἐνδιαφέροντα. Διὰ τὰς σχετικὰς πρὸς αὐτὰ κατασκευάς, εἶναι ἀναγκαῖα ὄχι μόνον τὰ θεωρήματα τοῦ ΙΙ Βιβλίου τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας* ἀλλὰ καὶ πολλὰ ἄλλα ἐκ τῶν προταθέντων ὡς ἀσκήσεων. Τὰ ἑπόμενα θεωρήματα εἶναι ἐκ τῶν συχνότερον χρησιμοποιουμένων.

Τμήματα παράλληλα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

Ἴσαι χορδαὶ ἴσον ἀπέχουν τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

Ἡ μεγαλυτέρα κοινὴ τέμνουσα δύο τεμνομένων περιφερειῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον (§ 616).

Πρόβλημα 207

848. Ἐκ σημείου Α νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων καὶ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν μῆκος λ, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ἄλλην παράλληλον εἰς τὰ Γ καὶ Δ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΓ καὶ ΒΔ εὐθείας.

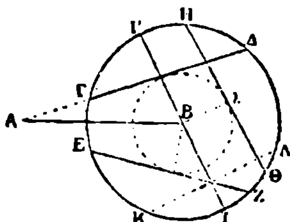
Πρόβλημα 208

849. Ἐκ σημείου Α νὰ ἀχθῇ τέμνουσα περιφερείας (Β) τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς τῆς περιφερείας τμῆμα ΓΔ τῆς τεμνούσης νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Θ ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας

καὶ ἀκτῖνα λ, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν δοθεῖσαν εἰς Η. Φέρομεν τὴν ΘΗ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ κέντρον Β καὶ ἐφαπτομένην τῆς εὐθείας ΘΗ.

Αἱ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι τέμνουσαι τῆς (Β) κατὰ τὸν ὅρον τοῦ προβλήματος· ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΓΔ, ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσον τοῦ κέντρου ἀπέχουσαι.



Σχ. 511

Πρόβλημα 208—I

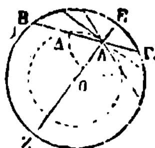
850. Διὰ δοθέντος σημείου Α ἐντὸς περιφερείας, νὰ ἀχθῇ χορδὴ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῆς ὁριζόμενα τμήματα ὑπὸ τοῦ σημείου Α νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἴσην πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

1) Διὰ τὸ ἄθροισμα ἀναγόμεθα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

2) Διὰ τὴν διαφοράν, ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΒΑΓ ἡ ζητουμένη χορδή, τοιούτη ὥστε

$$AB - A\Gamma = \lambda.$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν διαφορὰν $AB - A\Gamma = \lambda$, μεταφέρομεν τὸ τμῆμα ΑΓ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΔ τῆς ΒΑ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Δ κεῖνται ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς περιφερείας (Π_1), μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ, ἀφ' ἑτέρου, ἐπὶ τῆς (Π_2), μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα $B\Delta = \lambda$. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν Δ καθορίζει τὴν χορδὴν ΓΑΔΒ κατὰ τὸ πρόβλημα.



Σχ. 512

Διερεύνησις. Ὑπάρχουν ἐν γένει δύο λύσεις. Ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τῆς διαφορᾶς λ εἶναι 2ΑΟ· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ χορδὴ ΕΑΖ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Ἂν ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, ἡ ἀντίστοιχος χορδὴ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α τῆς περιφερείας (Π_1).

Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις ὑπάρχει μία μόνον λύσις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 208—II

851. Δίδονται σημεῖον Α καὶ δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Διὰ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν περιφερειῶν τοιαύτη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτῶν τμήματα τῆς τεμνούσης νὰ ἔχουν μῆκος ἴσον πρὸς λ.

Μὲ κέντρον Β ἐπὶ τῆς μιᾶς περιφερείας (Σχ. 512) καὶ ἀκτῖνα λ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ἄλλην εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὴν ΒΔ εὐθεῖαν καὶ κατασκευάζομεν περιφέρειαν, ὁμόκεντρον τῶν δοθεισῶν καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΒΔ προεκτεινομένης.

Αἱ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐφαπτόμεναι τῆς τελευταίας περιφερείας εἶναι τέμνουσαι τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 209

852. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Α) καὶ (Β), ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς δευτέρας ἀλλὰ μὴ ὁμόκεντρος πρὸς αὐτήν. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς μικροτέρας περιφερείας τοιαύτη, ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας ὁριζομένη ἐπ' αὐτῆς χορδὴ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ. Ποῖα τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ μήκους αὐτοῦ;

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν, ΜΝ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

1) Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἴσαι χορδαὶ ἴσον ἀπέχουν τοῦ κέντρου, ὁδηγούμεθα εὐκόλως εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν:

Σχ. 513.

Λαμβάνομεν χορδὴν ΓΔ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος λ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Β καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΓΔ. Ἑκάστη τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς (Α) ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

2) Ἡ εἰς τὸ Θ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ χορδὴν τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας ἔχει μῆκος τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμὴν τοῦ λ, τὸ δὲ μῆκος τῆς εἰς τὸ Ζ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ λ.

Ἐὰν τὸ κέντρον Β εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας (Α), ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ λ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τῆς (Β).

Πρόβλημα 209—Ι

853. Ὁμοία ἐκφώνησις. Ἡ διαφορὰ τῶν ὑπὸ σημείου ἐπαφῆς Μ ὁριζομένων τμημάτων ΟΜ, ΟΝ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2δ.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ φέροντες τὰς ἀκτῖνας ΑΟ, ΒΛ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΜΝ εὐθεῖαν ΑΗ (Σχ. 513), διαπιστοῦμεν ὅτι

$$\text{ΟΜ} - \text{ΟΝ} \quad \text{ἢ} \quad 2\delta = 2\text{ΛΟ} = 2\text{ΑΗ}$$

δηλ.

$$\text{ΑΗ} = \delta.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ κατασκευή: Τέμνομεν τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ διὰ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα δ. Ἂν Η εἶναι ἓν τῶν σημείων τομῆς, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ, ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Α) ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

Πρόβλημα 210

854. Δίδονται σημεῖον ἐπὶ περιφερείας καὶ χορδὴ αὐτῆς. Διὰ τοῦ σημείου νὰ ἀχθῇ δευτέρα χορδή, διαιρουμένη ὑπὸ τῆς πρώτης εἰς δύο τμήματα ἴσα.

(*Μέθοδοι*, § 92).

Πρόβλημα 210—Ι

855. Δίδονται σημεῖον ἐπὶ περιφερείας καὶ χορδὴ αὐτῆς κλπ.

(*Μέθοδοι* § 93, 2α *Παρατήρησις*).

Πρόβλημα 210—II

856. Δίδονται δύο γραμμαί καί σημεΐον Α. Νά άχθῆ τέμνουσα ΜΑΝ περατουμένη είς τάς γραμμάς ταύτας καί τοιαύτη, ὥστε ΑΜ = ΑΝ.

Αἱ δοθεῖσαι γραμμαί εἶναι:

1) *Δύο εὐθεῖαι.*

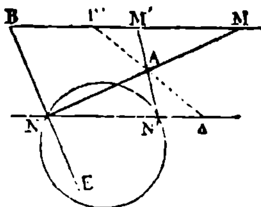
2) *Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια.*

3) *Δύο περιφέρειαι.*

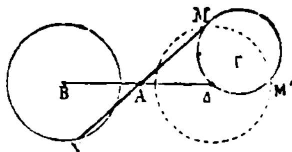
Δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν διά τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

1) Ἔστωσαν ΒΓ, ΒΕ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι καί Α τό σημεῖον (Σχ. 514).

Ἐπί τυχούσης διά τοῦ Α εὐθείας λαμβάνομεν μῆκος ΑΔ = ΑΓ καί φέρομεν τήν παράλληλον ΔΝ πρός τήν εὐθεῖαν ΒΓ. Θά ἔχωμεν ΑΝ = ΑΜ.



Σχ. 514.



Σχ. 515.

2) (Σχ. 514). Ἐργαζόμεθα ὅπως καί προηγουμένως. Ἡ παράλληλος δύναται νά τέμνῃ τήν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, νά εἶναι ἐφαπτομένη πρός αὐτήν ἢ καί ἐξωτερική αὐτῆς.

Ὑπάρχουν ἑπομένως δύο λύσεις, μία μόνον ἢ καμμία.

3) (Σχ. 515). Ἔστωσαν (Β) καί (Γ) αἱ περιφέρειαι.

Λαμβάνομεν ΑΔ = ΑΒ καί γράφομεν περιφέρειαν ἴσην πρός τήν (Β) καί μέ κέντρον Δ.

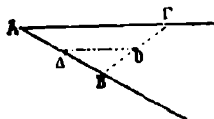
Θά ἔχωμεν:

$$ΑΜ = ΑΝ.$$

857. Παρατηρήσεις. 1) Δυνάμεθα νά ἐπιληφθῶμεν τοῦ πρώτου προβλήματος καί ὡς ἑξῆς:

Ἔστω Ο τό δοθέν σημεῖον ἐντός τῆς γωνίας Α.

Ὑποθέτοντες τό πρόβλημα λελυμένον καί φέροντες τήν ΟΔ παράλληλον πρός τήν ΑΓ, παρατηροῦμεν ὅτι τό σημεῖον Δ εἶναι μέσον τοῦ ΑΒ. Ἄν, ἑπομένως, λάβωμεν ἐκ τοῦ σημείου Δ, καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος τέμνει τήν μίαν τῶν εὐθειῶν, τμῆμα ΔΒ = ΔΑ, ἡ εὐθεῖα ΒΟΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.



Σχ. 516.

2) Ἡ ἑπομένη εἰδική περίπτωσις εἶναι ἡ μᾶλλον ἐνδιαφέρουσα καί σχετίζεται πρός ἓν ζήτημα ἤδη ἐξετασθέν (§ 138).

Πρόβλημα 210—III

858. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν ἔχουσα τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς μέσον.

Ἔστω ΕΖ μία τοιαύτη τέμνουσα.

1ος Τρόπος. Ἐκ τῶν κέντρων Α, Β φέρομεν τὰς καθέτους ΑΘ, ΒΗ ἐπὶ τὴν ΕΖ ὡς καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὰς ΓΙ.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Θ καὶ Η εἶναι μέσα τῶν ἴσων χορδῶν ΕΓ, ΓΖ, τὸ σημεῖον Γ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΘΗ τοῦ τραπεζίου ΘΗΒΑ καί, κατ' ἀκολουθίαν, τὸ σημεῖον Ι μέσον τῆς διακέντρου ΑΒ. Ἡ ζητουμένη, ἄρα, διεύθυνσις τῆς ΕΖ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἑνοῦσαν τὸ σημεῖον Γ μετὰ τοῦ μέσου Ι τοῦ τμήματος ΑΒ.

Σχ. 517

2ος Τρόπος. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΟ = ΓΑ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Ο καὶ ἴσην πρὸς τὴν (Α). Ἡ εὐθεῖα ΖΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Πρόβλημα 210—IV

859. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι· δι' ἑνὸς τῶν σημείων τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, νὰ ἀχθῇ χορδὴ αὐτῆς διαιρουμένη ὑπὸ τῆς ἐσωτερικῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.

1η Λύσις. Ἔστω ΑΒ = ΒΓ.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΒΜ, θὰ ἔχωμεν ΑΜ = ΓΜ, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΜΒΓ εἶναι ὀρθή, ἡ εὐθεῖα ΓΟΜ θὰ εἶναι διάμετρος τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας.

Ἑπομένως: μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας γράφομεν τόξον ΜΝ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΟΓ καὶ ΑΓ.

2α Λύσις. Φέρομεν τὴν διάμετρον διὰ τοῦ Α καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου τμήματος αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Α γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας ὁρίζει τὸ σημεῖον Β.

Σχ. 518.

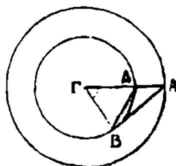
Πρόβλημα 210—V

860 Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β, νὰ ἀχθοῦν παράλληλοι εἰς ἀπόστασιν λ ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα λ, γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς αὐτήν. Τὸ μῆκος ΑΓ ἢ λ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων.

Πρόβλημα 210—VI

861. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν, δι' αὐτῶν δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι, ἀπέχουσαι ἀλλήλων κατὰ μῆκος λ καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΒ νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν 2 φ.



Σχ. 519.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ, τὴν διαφορὰν ΑΔ = λ τῶν δύο ἄλλων καὶ τὴν γωνίαν Γ. Ἀφ' ἑτέρου, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν ΓΒΔ, ΓΔΒ εἶναι ἡ συμπληρωματικὴ τοῦ ἡμίσεος τῆς γωνίας Γ. Ὥστε

$$\widehat{\Gamma\Delta B} = 90° - \varphi$$

$$\widehat{A\Delta B} = 180° - (90° - \varphi) = 90° + \varphi$$

καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν αὐτοῦ.

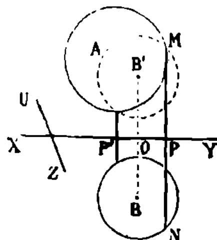
Πρόβλημα 211

862. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τραπεζίου εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν διαγωνίων τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος δοθέν. Διερευνήσατε τὸ πρόβλημα.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 250).

Πρόβλημα 212

863. Δίδονται δύο περιφέρειαι καὶ εὐθεῖα· νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν περιφερειῶν νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας.



Σχ. 520.

Ἡ λύσις εἶναι ἄμεσος διὰ τῆς μεθόδου τῆς συμμετρίας. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν (Β'), συμμετρικὴν τῆς (Β) ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΥ.

Αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ Μ'Ν' εἶναι αἱ πληροῦσαι τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσιν καὶ ἂν ζητῆται ἡ εὐθεῖα ΜΝ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν ZU, πλαγίαν πρὸς τὴν ΧΥ.

Διὰ τοῦ σημείου Β φέρομεν τὴν ΒΟΒ' παράλληλον πρὸς τὴν ZU καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΟΒ' = ΟΒ.

Πρόκειται ἄλλωστε περὶ τοῦ ἑπομένου προβλήματος :

Πρόβλημα 213

864. Μεταξὺ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, νὰ ἐγγραφῇ τμῆμα εὐθύγραμμον δοθέντος μήκους λ καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΧΥ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 194 β).

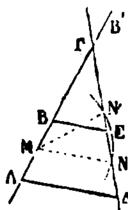
Πρόβλημα 214

865. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Α) καὶ (Β) ἐκτὸς ἀλλήλων κείμεναι, ὡς καὶ εὐθεῖα ΧΥ. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα παράλληλος πρὸς τὴν ΧΥ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν, τῶν ὁριζομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν περιφερειῶν, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 194 γ).

Πρόβλημα 215

866. Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας Γ, νὰ ἀχθοῦν δύο τέμνουσαι παράλληλοι καὶ τοιοῦται, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς γωνίας τμημάτων των νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν μῆκος 2 λ.



Σχ. 521.

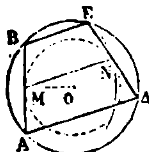
Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΔ + ΒΕ = 2 λ.

Ἡ μέση βάσις ΜΝ τοῦ τραπεζίου ΑΒΕΔ θὰ ἔχῃ μῆκος λ. Τὸ σημεῖον ἄρα Ν πρέπει νὰ εἶναι ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη ἐκ τῶν τομῶν τῆς περιφερείας (Π), μὲ κέντρον τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ἀκτῖνα λ, καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ.

Παρατηρήσεις. 1) Ὑπάρχουν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, μία ἢ καμμία, ἐὰν ἡ περιφέρεια (Π) τέμνῃ τὴν ΓΔ, ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ εἶναι ἐξωτερική της, ἀντιστοίχως.

2) Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι ὡς τὰ Α καὶ Β', ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Γ, ἡ προηγουμένη κατασκευὴ δίδει δύο παράλληλα τμήματα μὲ διαφορὰν 2 λ τῶν μηκῶν των.

Πρόβλημα 215—Ι



Σχ. 522.

867. Τὸ ἴδιον ζήτημα. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκουν εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν.

Γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΜ καὶ λαμβάνομεν χορδὴν ΜΝ = λ. Θὰ ἔχωμεν.

$$ΑΔ + ΒΕ = 2λ.$$

Πρόβλημα 216

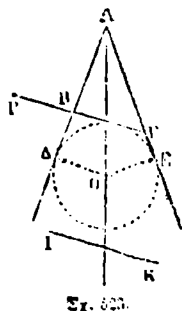
868. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τριγώνου τοιαύτη, ὥστε τὸ μῆκος της νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν, τῶν μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς παραλλήλου ταύτης κειμένων.

1) Ἡ παράλληλος πρέπει νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον (§ 458).

2) Ἡ παράλληλος πρέπει νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς εἰς τὸ τρίγωνον παρεγγεγραμμένης περιφερείας, τῆς ἐφαπτομένης τῆς βάσεως (§ 459).

Πρόβλημα 216—I

869. Διὰ δοθέντος σημείου Ρ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΒΓ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας Α εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον.



Σχ. 523.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 2τ.$$

Γνωρίζομεν, ὅτι πᾶσα ἐφαπτομένη τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου (Ο) δίδει τρίγωνον σταθερᾶς περιμέτρου (§ 739).

Λαμβάνομεν ἑπομένως ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α τμήματα ΑΔ = ΑΕ = τ, ὑψοῦμεν εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο).

Ἡ ἐκ τοῦ Ρ ἐφαπτομένη ΡΒΓ τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Πρόβλημα 216—II

870. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΓ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας Α, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΙΚ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ εὐθεῖα ΒΓ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς θὰ ἀχθῇ παραλλήλως τῆς ΙΚ.

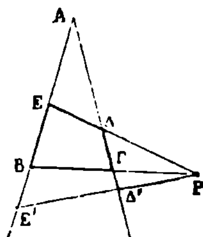
Πρόβλημα 216—III

871. Ὅμοια ζητήματα: ΑΒ + ΑΓ — ΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς 2τ.

Ἡ ἐφαπτομένη ΡΒΓ θὰ πρέπει νὰ ἀχθῇ κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ περιφέρεια (Ο) νὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ἀντὶ παρεγγεγραμμένη εἰς αὐτό.

Πρόβλημα 217

872. Διὰ δοθέντος σημείου Ρ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΔΕ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα ΔΕ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΔΓ καὶ ΒΕ τμημάτων.



Σχ. 524

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐκ τῆς σχέσεως ΔΕ=ΔΓ+ΒΕ, ἕπεται:

$$ΑΔ + ΔΕ + ΑΕ = ΑΒ + ΑΓ,$$

ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι γνωστή. Ἀναγόμεθα οὕτω εἰς τὴν ἄσκησιν (§ 869).

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν τὰ τμήματα πρέπει νὰ εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ τριγώνου

$$Δ'Ε' = ΒΕ' + ΓΔ',$$

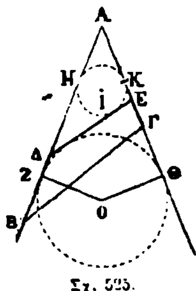
θὰ ἔχωμεν

$$ΑΔ' + ΑΕ' - Δ'Ε' = ΑΒ + ΑΓ \quad (§\ 871).$$

2) Ἐὰν ἡ τέμνουσα πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἡ κατασκευὴ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προβλήματος τῆς § 870.

Πρόβλημα 217—I

873. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ τέμνουσα ΔΕ δοθέντος μήκους λ, ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΒΔ καὶ ΓΕ.



Σχ. 525.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ

$$ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ = λ.$$

Λαμβάνομεν

$$ΑΖ = ΑΘ = \frac{1}{2}(ΑΒ + ΑΓ).$$

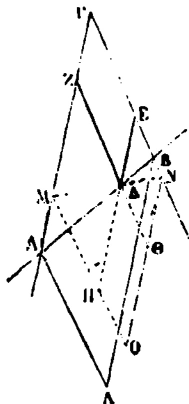
Πᾶν τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΔΕ, ἔχει ὡς περίμετρον ΑΒ + ΑΓ (49). θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο ἴση κατὰ μῆκος πρὸς λ.

Ἀφ' ἑτέρου, ἂν ἡ πλευρὰ αὐτὴ ἐφάπτεται καὶ τῆς περιφερείας (Ι), τὸ μῆκος της θὰ ἰσοῦται πρὸς ἐκεῖνο ἑκάστου τῶν τμημάτων ΖΗ = ΘΚ. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν τμήματα ΖΗ = ΘΚ = λ, νὰ κατασκευάσωμεν τὰς περιφερείας (Ο) καὶ (Ι) καὶ νὰ φέρωμεν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΔΕ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

(Βλ. ἐπίσης § 1655 δ).

Πρόβλημα 218

874. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ παράλληλοι ΔΕ, ΔΖ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ. Εὕρετε ἐπίσης τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται τὸ μῆκος λ ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ.



Σχ. 526.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΔΕ + ΔΖ = λ.

Διὰ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ΜΓΝ. Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς βάσεώς του, τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα θὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς ΓΜ = ΓΝ (§ 268, Πόρισμα). Τοῦτο ἄλλωστε εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ ῥόμβου ΓΜΟΝ· ἐπειδὴ

$$ΔΖ + ΔΕ = ΖΘ = ΗΕ = ΓΜ.$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν ΓΜ = ΓΝ = λ καὶ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΜΝ καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ὁρίζει τὸ σημεῖον Δ.

---

49. Σημ. μετ. Ἡ ΔΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου (Ο).

Διά Δ ≡ Β, τὸ ἄθροισμα λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμὴν λ = ΒΓ. Κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ Δ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α τὸ ἄθροισμα αὐξάνει, διὰ νὰ λάβῃ τὴν μεγίστην τιμὴν εἰς τὴν θέσιν Α, ὁπότε λ = ΑΓ.

Πρόβλημα 218—Ι

875. Ὅμοιον πρόβλημα. Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΔΖ ὀφείλουν νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο δοθείσας διευθύνσεις.

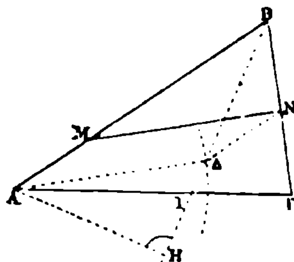
Ἡ λύσις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην ἀλλὰ θὰ πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς τὸ ΙΙΙ Βιβλίον. Ὁ τόπος τῶν σημείων μὲ τὸ σταθερὸν ἄθροισμα δὲν εἶναι πλέον ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀλλ' ἑνὸς σκαληνοῦ. (*Μέθοδοι*, § 269).

Πρόβλημα 218—ΙΙ

875 α. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΝ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Β τοιαύτη, ὥστε τὸ μὲν μῆκος της νὰ εἶναι δοθὲν λ, τὰ δὲ τμήματα ΑΜ, ΒΝ, ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἴσα.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἂς φέρωμεν τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ΜΝ.

Ἐπειδὴ ΑΜ = ΔΝ = ΝΒ, τὸ τρίγωνον ΔΝΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ γωνία $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΒΔΝ} = \widehat{ΔΒΝ}$. Εἶναι ἑπομένως ἡ ΒΔ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου καὶ τὸ σημεῖον Δ ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς διχοτόμου ταύτης καὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ = λ.



Σχ. 527.

Ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος τῆς ΑΜ ὁρίζει τὸ σημεῖον Ν καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ δίδει τὴν ζητουμένην τέμνουσαν ΝΜ.

Παρατηρήσεις. 1) Ὑπάρχουν ἐν γένει δύο λύσεις, ἀντίστοιχοι τῶν δύο σημείων τομῆς τῆς περιφερείας (Α, λ) καὶ τῆς διχοτόμου ΒΙ.

2) Ἡ κάθετος ΑΗ δίδει τὸ ἐλάχιστον τοῦ μήκους λ.

3) Κατ' ἀνάλογον τρόπον θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν θεωροῦντες τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β.

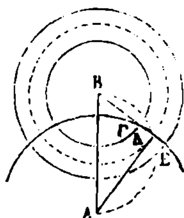
4) Ἀπὸ ἀπόψεως καθαρῶς γεωμετρικῆς, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τέσσαρας λύσεις, τρεῖς, δύο, μίαν ἢ καμμίαν. Ἀπὸ ἀπόψεως ὅμως ἀναλυτικῆς, ἡ περιφέρεια (Α, λ) τέμνει τὸ ζεῦγος τῶν δύο διχοτόμων τῆς γωνίας Β κατὰ τέσσαρα σημεῖα πραγματικὰ ἢ φανταστικά.

Σημείωσις. Διὰ τὴν προέλευσίν τοῦ προβλήματος τούτου, βλ. § 844 α.

Πρόβλημα 219

876. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα δύο δοθείσας ὁμοκέντρους κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα τῶν δύο ση-

μείων τομῆς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ κέντρου τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν. (Ritt, *Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie*).



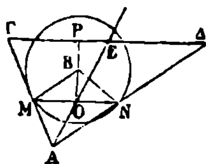
Σχ. 528.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΕ θὰ διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου Δ τῆς, ὁμοκέντρου τῶν δοθεισῶν καὶ ἴσον ἀπεχούσης ἑκατέρας αὐτῶν, περιφερείας, καὶ μάλιστα θὰ εἶναι ἐφαπτομένη αὐτῆς.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ ἐπὶ τὴν μέσην αὐτὴν περιφέρειαν καὶ νὰ λάβωμεν ΑΓ=ΑΕ διὰ ἀκτῖνα τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 219—I

877. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Β, νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας Α εἰς τρόπον, ὥστε μία τῶν ὁριζομένων χορδῶν νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΔ.



Σχ. 529.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΜΝ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ΒΡ, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου Β ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΓΔ καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΟΕ, ἥτις εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ. Εἶναι λοιπὸν τὸ Ο ἡ τομὴ τῶν δύο ὡρισμένων αὐτῶν εὐθειῶν, ΜΝ ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ΒΜ ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

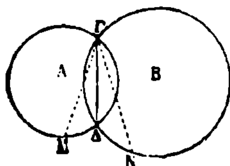
Πρόβλημα 220

878. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β) νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν δοθέντος μήκους.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 139).

Πρόβλημα 220—I

879. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ ἀχθῇ ἡ βραχυτέρα τέμνουσα αὐτῶν.



Σχ. 530.

Εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ ΓΔ τῶν περιφερειῶν· ἐπειδὴ πᾶσα ἄλλη ΓΜ ἢ ΓΝ εἶναι μεγαλυτέρα, ὡς ἐγγύτερον τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου κέντρου εὑρισκομένη ἀπὸ τὴν ΓΔ.

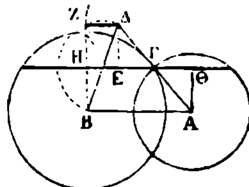
Μεταβολὴ τῆς τεμνούσης. Ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου μήκους ΓΔ, ἡ τέμνουσα φθάνει εἰς τὴν θέσιν ΓΜ καὶ αὐξάνει συνεχῶς ἐφ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ πλησιάζει πρὸς τὸ Γ καὶ μέχρι τῆς θέσεως, καθ' ἣν γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον, ὁπότε γίνεται μεγίστη. Ἀπὸ τῆς θέσεως αὐτῆς ἐλαττοῦται, διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ΓΝ καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὴν ΓΔ.

Πρόβλημα 220—II

880. Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο περιφερειῶν (Α) καὶ (Β), νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἐπ' αὐτῆς χορδῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2 δ. (Guilmin, *Exercices de Géométrie*).

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΓΗ — ΓΘ = δ.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν διαφορὰν δ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τεμνούσης τμῆμα ΓΕ = ΓΘ, (ἢ προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΓ εἰς ἴσον μῆκος ΓΔ) καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ. Καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους θὰ ἔχωμεν ΔΖ = ΗΕ = δ.



Σχ. 531.

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Δ, εὑρίσκομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς ζητουμένης τεμνούσης, γράφοντες τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΒΔ καὶ ὁρίζοντες τὸ σημεῖον τομῆς της Ζ μετὰ τῆς (Δ, δ). Ἡ εὐθεῖα ΔΖ δίδει τὴν διεύθυνσιν, παραλλήλως πρὸς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ ἡ κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος ζητουμένη τέμνουσα.

880 α. ***Σημείωσις.*** Εἶναι ἀδύνατος ἡ διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου λύσις τοῦ προβλήματος πρὸς τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ φυσικῶς τὸ προηγουμένως ἐξετασθέν: *Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν, νὰ ἀχθῇ ἐκ σημείου Α κοινῇ αὐτῶν τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἐπ' αὐτῆς χορδῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος.* (N. A. (1880), σ. 480, ζτμ· 1351· *Int. d. Math.*, (1894), σ. 131, ζτμ. 238 καὶ (1894), σ. 207, E. Lemoine).

Πρόβλημα 221

881. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀποτέμνουσα ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν χορδὰς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ἴσας πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν εὐθειῶν περιφέρειαν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος μήκους λ. Ἡ ὁμόκεντρος περιφέρεια τῆς γραφείσης καὶ διὰ τοῦ ἄκρου τοῦ τμήματος τούτου διερχομένη ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

Παρατήρησις. Λύσεις τοῦ προβλήματος παρέχουν καὶ αἱ παρεγγεγραμμέναι εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρειαι.

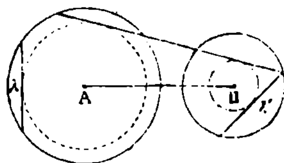
881 α. ***Σημείωσις.*** Ἐὰν αἱ χορδαὶ ὀφείλουν νὰ ἔχουν ἄνισα μήκη λ, μ, ν, ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου εἶναι ἀνέφικτος διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου· ἐπειδὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς κατασκευῆς τῶν σημείων τομῆς δύο ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν. Ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις.

Τὸ πρόβλημα τῆς § 1488 α εἶναι τὸ ἐναλλακτὸν τοῦ ἀνωτέρω. (Βλ. εἰς An. d. Gerg., τόμ. XIX, 1828 - 1829, σ. 175, ὡραῖον σχετικὸν ἄρθρον).

Πρόβλημα 221—1

882. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δύο δοθεισῶν περιφερειῶν τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῆς χορδαὶ νὰ ἔχουν μήκη δοθέντα λ καὶ μ.

Ἐγγράφομεν εἰς τὰς δύο περιφερείας χορδὰς μὲ μήκη λ καὶ μ ἀντιστοίχως. Ἑκάστη τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν, μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένων τῶν ἀχθεισῶν χορδῶν, ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

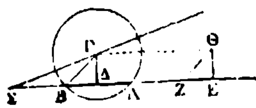


Σχ. 632

Ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις ἐν γένει, ὅσαι καὶ αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς δύο ἐξωτερικὰς περιφερείας.

Πρόβλημα 221—II

883. Δίδονται γωνία καὶ δύο μήκη λ καὶ ρ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον αὐτὸ καὶ ἀκτῖνα ρ νὰ ὁρίζῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς χορδὴν μήκους λ.



Σχ. 633.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΑΒ = λ, ΓΒ = ρ.

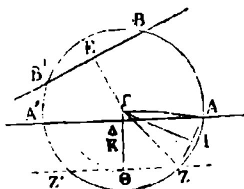
Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι κατασκευάσιμον, ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $ΒΔ = \frac{λ}{2}$ καὶ ΒΓ = ρ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ παραθέσωμεν εἰς τὴν θέσιν ΘΖΕ τοῦ σχήματος καὶ ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΖΕ, ὁρίζεται τὸ κέντρον Γ τῆς ζητουμένης περιφερείας, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ΓΒ, παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΘΖ πλευρὰν τοῦ τριγώνου ΘΖΕ.

Πρόβλημα 221—III

884. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ ἀποτέμνουσα ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν χορδὰς δοθέντων μηκῶν μ, ν.

Δι' ἑκάστην τῶν εὐθειῶν, κατασκευάζομεν τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν αὐτὴν κατὰ χορδὴν ἴσην πρὸς τὸ ἀντίστοιχον μῆκος. Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν τόπων αὐτῶν (§ 881), τέσσαρα ἐν γένει, παρέχουν καὶ τὰς τέσσαρας, τὸ πολύ, λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 222



Σχ. 634.

885. Δίδονται δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον Γ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον καὶ ὁρίζουσα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν χορδὰς ΑΑ' ΒΒ', τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος 2 λ.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΑ' + ΒΒ' = 2 λ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν χορδὴν ΖΖ', παράλληλον πρὸς τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν ΑΑ' καὶ ἴσην πρὸς ΒΒ', θὰ ἔχωμεν ΓΕ = ΓΘ, ΑΔ + ΘΖ = λ· ἡ δὲ μέση βάσις ΙΚ τοῦ τραπεζίου ΑΔΘΖ θὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{λ}{2}$.

Ἑπομένως: Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὸ τμῆμα ΓΘ, κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Γ ἀπὸ τῆς ἄλλης, καθὼς καὶ τὸ ΚΙ, κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ ΔΘ καὶ ἴσον πρὸς $\frac{\lambda}{2}$. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΙ εἰς τὸ Ι τέμνει τὴν πρώτην εὐθεῖαν εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς ζητουμένης περιφερείας καὶ τῆς ὁποίας ἀκτὶς εἶναι ἡ ΓΑ.

Παρατήρησις. Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ἂν δίδεται ἡ διαφορὰ τῶν χορδῶν ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν· ἀλλὰ τότε ἡ ΑΙΖ εἶναι διαγώνιος τοῦ τραπεζίου.

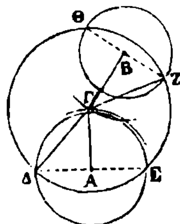
Πρόβλημα 223

886. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, τέμνουσα εἰς δύο ἴσα μέρη δύο δοθείσας περιφερείας.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΓΔ = ΓΖ = ρ, αἱ δὲ χορδαὶ ΔΕ, ΖΘ διάμετροι τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΒΖ καὶ ΓΑΔ εἶναι κατασκευάσιμα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας πρὸς ρ καὶ τὰς πλευρὰς ΒΖ καὶ ΑΔ αὐτῶν ἴσας πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, τὰ ἀποστήματα ΓΑ καὶ ΓΒ εἶναι ὡρισμένα.

Κατ' ἀκολουθίαν, τὸ κέντρον Γ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας τὰ ἀποστήματα ταῦτα, ἀντιστοίχως.



Σχ. 535.

Πρόβλημα 223—I

887. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας περιφερείας κατὰ χορδὰς δοθέντων μηκῶν.

Ἀνάλογος λύσις πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

Πρόβλημα 223—II

888. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος, τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὴν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς δοθὲν τμῆμα.

Πρόβλημα 223—III

889. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ τέμνουσα περιφέρειαν (Γ) κατὰ χορδὴν παράλληλον δοθείσης εὐθείας ΧΥ.

Τὸ κέντρον Ο τῆς ζητουμένης θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καθέτου καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου ἐπὶ τὴν ΧΥ.

Πρόβλημα 223—IV

890. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ σημείου Α καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας περιφερείας (Β), (Γ) κατὰ χορδὰς παραλλήλους πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας ΧΥ καὶ Χ'Υ', ἀντιστοίχως.

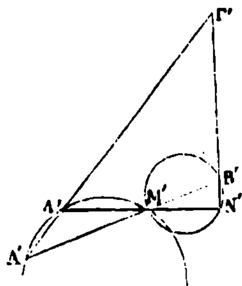
Τὸ κέντρον Ο τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐκ τῶν Β καὶ Γ καθέτων ἐπὶ τὰς ΧΥ καὶ Χ΄Υ΄ εὐθείας, ἀντιστοίχως.

Πρόβλημα 224

891. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΛΜΝ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ τοιαύτη, ὥστε ΛΜ = ΜΝ = λ δοθέν.

Θεωρήσωμεν τὸ ἀντίθετον πρόβλημα (§ 213).

Λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας Λ΄Ν΄ τμήματα Λ΄Μ΄ = Μ΄Ν΄ = λ καὶ διὰ τῶν σημείων Λ΄, Μ΄, Ν΄ φέρομεν τρεῖς εὐθείας εἰς τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓ. Πρὸς τοῦτο, κατασκευάζομεν τὰ κυκλικὰ τόξα Λ΄Α΄Μ΄ καὶ Μ΄Β΄Ν΄, μὲ ἀντιστοίχους ἐγγεγραμμένας γωνίας εἰς αὐτὰ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας Β αὐτοῦ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ΄ φέρομεν τέμνουσαν Α΄Μ΄Β΄ τῶν δύο περιφερειῶν ἴσην πρὸς τὴν ΑΒ (§ 878).



Σχ. 536.

Τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ δὲν μένει παρὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ. Αἱ θέσεις τῶν Λ΄, Μ΄, Ν΄ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ ὁρίζουν τὴν ζητουμένην τέμνουσαν.

Πρόβλημα 224—Ι

892. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο ἴσον πρὸς δοθὲν ΛΜΝ.

Θεωροῦμεν τὸ ἀντίθετον πρόβλημα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 215).

Πρόβλημα 225

893. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ περιφερείας καὶ σταθερὰ διάμετρος ΕΖ αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τρίτον σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας εἰς τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τμῆμα ΜΝ δοθέντος μήκους.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 101).

Πρόβλημα 226

894. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ περιφερείας (Ο) καὶ σταθερὰ διάμετρος ΕΖ αὐτῆς. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας τρίτον σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς σταθερᾶς διαμέτρου τμήματα, ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, ΟΜ καὶ ΟΝ ἴσα.

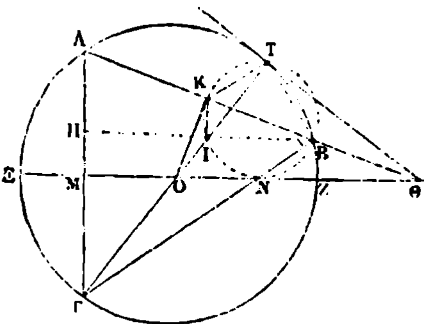
(Βλ. *Μέθοδοι*, § 102).

Εἰς τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ τὴν ἀλγεβρικὴν μέθοδον (§§ 330, 331). Χρησιμοποιοῦντες δὲ τὴν σχέσιν τοῦ Fermat (§ 1329), θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ἄλλα προβλήματα ἀνάλογα πρὸς αὐτά.

Θεώρημα 226—I

895. Ἔστωσαν Μ, Ν δύο σημεῖα συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὸ κέντρον περιφερείας (Ο) καὶ Γ σημεῖον τυχὸν τῆς περιφερείας. Αἱ εὐθεῖαι ΓΜ, ΓΟ, ΓΝ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Α, Τ καὶ Β. Δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς Τ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΜΝ.

Ἡ παράλληλος ΒΗ πρὸς τὴν διάμετρον διαιρεῖται εἰς τὸ Ι ὑπὸ τῆς ΟΤ εἰς δύο τμήματα ἴσα· ἐπίσης, ὁ πούς Κ τῆς ἐκ τοῦ Ο καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο τμήματα ἴσα. Εἶναι ἑπομένως ἡ ΙΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΜ, ἡ γωνία ΙΚΒ ἴση πρὸς τὴν ΜΑΒ ἢ ΓΤΒ καὶ τὸ τετράπλευρον ΙΚΤΒ ἐγγράψιμον. Κατ' ἀκολουθίαν γωνία ΙΤΚ=ΚΒΙ=ΚΘΟ, δηλ. καὶ τὸ τετράπλευρον ΟΚΤΘ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἄρα



Σχ. 537.

$\widehat{OK\Theta} = 90^\circ = \widehat{OT\Theta}$.

Ἤτοι, ἡ συνδέουσα εὐθεῖα τὸ σημεῖον Θ, τομῆς τῆς ΜΝ καὶ ΑΒ, μετὰ τοῦ Τ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΤ ἢ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Ο).

Θεώρημα 226—II

895 α. Πρὸς ὁρισμὸν ἑνὸς σημείου Γ τοιούτου, ὥστε αἱ συνδέουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι μετὰ τῶν Α καὶ Β νὰ τέμνουν δοθεῖσαν διάμετρον κατὰ σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον Ο, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒΘ, ἡ ἐφαπτομένη ΘΤ καὶ ἡ διάμετρος ΤΟΓ.

Εἶναι ἡ κατασκευὴ τῶν Georges Ritt (*Problèmes de Géométrie Analytique*) καὶ Desboves (*Questions de Géométrie*, 2α ἐκδ., σ. σ. 187, 188.—ΙΧ).

Μία λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος δίδεται καὶ διὰ τῆς θεωρίας τῶν *πόλων καὶ πολικῶν* (*Traité de Géométrie*, Rouché et Comberousse, 7η ἐκδ., n° 347, σ. 244).

Πρόβλημα 226—III

896 α. Πρόβλημα 894, ἀντικαθιστῶντες τὴν διάμετρον διὰ χορδῆς καὶ τοῦ μέσου της.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 274).

β. Ἴδιον πρόβλημα· ἡ δοθεῖσα εὐθεία ΕΖ εἶναι τυχοῦσα καὶ τὸ Ο τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 276).

Γωνίαι

897. Τὰ προτιθέμενα προβλήματα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς τρεῖς κυρίας κατηγορίας.

α) *Διαίρεσις γωνιῶν*. Ἡ κατηγορία αὕτη περιλαμβάνει πάντα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖται ἡ ἀγωγὴ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας (§§ 898, 899) καὶ ἡ διαίρεσις τόξου εἰς τρία ἴσα μέρη (§§ 910, 912).

β) *Κατασκευὴ γωνίας ἴσης πρὸς δοθεῖσαν*. Εἰς ταύτην τοποθετοῦνται ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται, ὅπως δύο ἢ τρία δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας (§§ 902, 903, 904, 915 κλπ.).

γ) Εἰς μερικὰς ἀσκήσεις σπουδάζεται ἡ μεταβολὴ μιᾶς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ μετακινεῖται, ἢ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ μεταβάλλονται καθ' ὡρισμένον νόμον (§§ 923, 924, 929).

Διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν δύο τελευταίων κατηγοριῶν βοηθούμεθα κυρίως ὑπὸ τοῦ *κυκλικοῦ τόξου μὲ δοθεῖσαν ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ* (§§ 904, 907, 919, 921, 924, 926) καὶ τῆς μεθόδου *διὰ διπλασιασμοῦ ἢ συμμετρίας* (§§ 902, 914, 915, 925).

Πρόβλημα 227

898. Δίδεται ἡ διχοτόμος καὶ μία τῶν πλευρῶν γωνίας καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη πλευρά, ἂν αἱ δύο πρῶται εὐθεῖαι τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως.

Λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον δύο σημείων τῆς δοθείσης πλευρᾶς κλπ.

Πρόβλημα 227—I

898 α. Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία Α εἰς δύο μέρη ἴσα ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου.

Τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς κανόνος μὲ ἴσας διαιρέσεις ἐπ' αὐτοῦ, λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τμήματα ΑΒ = ΑΓ, ΑΒ' = ΑΓ'. Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν Α μετὰ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν ΒΓ' καὶ ΓΒ' εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Πρόβλημα 227—II

899. Δοθέντος τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα τῆς διαμέσου ὡς πρὸς τὴν ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς διχοτόμον.

Ἔστω ΑΜ = ΒΜ.

Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ΓΒ' = ΓΒ, ΓΑ' = ΓΑ καὶ νὰ φέρωμεν τὴν συνδέουσαν τὴν κορυφὴν Γ μετὰ τοῦ μέσου Μ' τῆς Α'Β'. Αἱ εὐθεῖαι ΓΜ, ΓΜ' εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν διχοτόμον ΓΙ. (Βλ. ἐπμ. § 1229, ΙΙ).

899 α. *Σημείωσις.* Ἡ εὐθεῖα ΓΜ', ἀρχικῶς ὀνομασθεῖσα *ἀντιπαράλληλος διάμεσος* ὑπὸ τοῦ Lemoine, εἶναι σήμερον γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα *συμμετροδιάμεσος* (symédiane), τὸ ὁποῖον τῆς προσέδωσε ὁ Μ. D'Ocagne (N.A. (1883), σ. σ. 450, 459· (1883) σ. 25· (1885) σ. 360).

Ὁ Lemoine, ἀπὸ τοῦ 1873, ὑπέδειξε πολλὰς ἰδιότητας τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν συμμετροδιαμέσων ἑνὸς τριγώνου καὶ αἱ παρατηρήσεις αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἡ ἀπαρχὴ τῶν ἐρευνῶν, αἵτινες ὡδήγησαν εἰς τὴν δημιουργίαν τῆς *Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου*. (Βλ. ἐπμ., §§ 2330, 2352).

Ὁ M. d'Ocagne ἐπίσης ἐπεδόθη ἰδιαιτέρως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Σχ. 538

Πρόβλημα 228

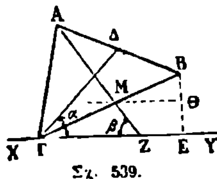
900. Ἐκ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν ἄλλην κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἔχουσαν μίαν πλευρὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς γωνίας εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ὑπάρχουν δύο λύσεις.

Πρόβλημα 228—I

901. Δίδονται εὐθεῖα ΧΥ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖο Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας τοιοῦτον, ὥστε μία τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΓΒ νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν κατα δοθεῖσαν γωνίαν.



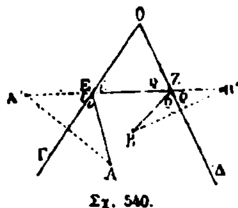
Σχ. 539.

α) Διὰ τὴν διάμεσον ΔΓ, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΔΓ κατὰ τὴν γωνίαν α πρὸς τὴν ΧΥ.

β) Ἂν ἡ διάμεσος ἄγεται ἐκ μιᾶς τῶν ἄλλων κορυφῶν, λ. χ. τῆς Α, φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΖ κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν πρὸς τὴν ΧΥ καὶ τέμνομεν αὐτὴν εἰς τὸ Μ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΘΜ, παραλλήλου πρὸς τὴν ΧΥ καὶ εἰς ἀποστάσεις ἀπ αὐτῆς καὶ τοῦ σημείου Β ἴσας. Ἡ ΒΜ τέμνει τὴν ΧΥ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ.

Πρόβλημα 228—II

902. Δύο τοῖχοι ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν πρὸς ἀλλήλους γωνίαν τυχοῦσαν, δύο δὲ ἄτομα Α καὶ Β εἶναι ἐστραμμένα πρὸς αὐτούς. Εἰς ποῖα σημεῖα τῶν δύο τοίχων πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν δύο κάτοπτρα Ε, Ζ, ἵνα καταστῇ δυνατὸν τὰ δύο ταῦτα ἄτομα νὰ ἀλληλοβλέπωνται;



Σχ. 540.

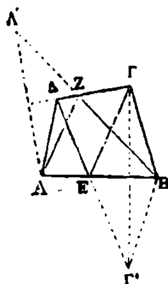
Ἔστωσαν Α′ καὶ Β′ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων Α καὶ Β

πρὸς τοὺς δύο τοίχους ἀντιστοίχως· αἱ τομαὶ τῶν ΟΓ καὶ ΟΔ μετὰ τῆς Α'Β' εὐθείας καθορίζουν τὰ ζητούμενα σημεῖα.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ ρ, καὶ ἐπομένως ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΖΒ εἶναι πορεία ὀπτικῆς ἀκτῖνος.

Πρόβλημα 228—III

903. Δοθέντος ἑνὸς τυχόντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῆς περιμέτρου του, ἐκ τῶν ὁποίων δύο ἀπέναντι πλευραί, αἱ ΑΔ καὶ ΓΒ λ. χ., φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.



Σχ. 541.

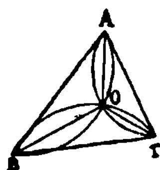
Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ κείμενον, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Γ', συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ'. Ἡ τομή της Ε μετὰ τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Τελείως ὁμοίως ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Ζ ἐπὶ τῆς ΔΓ.

Πρόβλημα 229

904. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον αὐτό.



Σχ. 542.

Ἀφοῦ αἱ τρεῖς περὶ τὸ Ο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὰ $\frac{4}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. Ἐπομένως, τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἡ τομὴ δύο κυκλικῶν τόξων, διερχομένων διὰ δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἕκαστον καὶ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς 120°.

Βλ. καὶ προηγούμενον θέμα (§ 754).

Πρόβλημα 229—I

905. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας μ, ν, ρ ἀντιστοίχως.

α) Ἐὰν τὸ σημεῖον πρέπει νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν $\mu+\nu+\rho=4$ ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ἐπομένως θὰ ταυτίζεται πρὸς τὴν τομὴν Ο τῶν τόξων (Α, Β, μ) καὶ (Β, Γ, ν)· ἐπειδὴ κατ' ἀνάγκην θὰ εἶναι τότε $\widehat{ΑΟΓ}=\rho$.

β) Ἐὰν τὸ σημεῖον εἶναι ἐξωτερικόν, μία τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· ἡ κατασκευὴ μένει ἡ ἰδία.

Πρόβλημα τοῦ Brocard 229—II

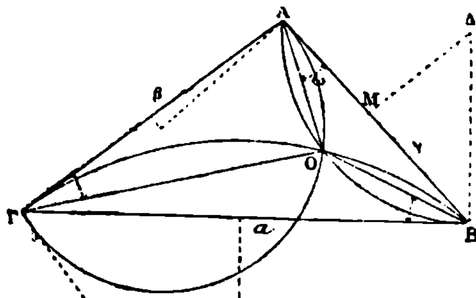
906. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ νὰ εἶναι ἴσαι (N. A., 1875, σ. 192, ζτμ. 1166, H. Brocard· λύσις ὑπὸ Chadu, σ. 286).

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου γράφομεν τόξα μὲ ἐγγεγραμμένας γωνίας εἰς αὐτὰ $\widehat{Γ}$, $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, ἀντιστοίχως.

1) Τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμά των εἶναι 360°.

2) Ἡ γωνία ΟΑΒ = ΟΒΓ, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΟΒ· ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΟΒ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ. Ἐπίσης γων. ΟΒΓ = ΟΓΑ, ὡς μετρούμεναι ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου ΟΓ.

Παρατηρήσεις. 1) Λαμβάνομεν μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος γράφοντες τὰ τόξα ΑΟ′Β, ΒΟ′Γ, ΓΟ′Α, ἐφαπτόμενα τῶν πλευρῶν β, γ, α, ἀντιστοίχως.



Σχ. 543.

2) Αἱ περιφέρειαι, αἱ διερχόμεναι διὰ δύο κορυφῶν τριγώνου καὶ ἐφαπτόμεναι μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν καλοῦνται *ἐπισυνημμέναι (adjointes) περιφέρειαι* (50).

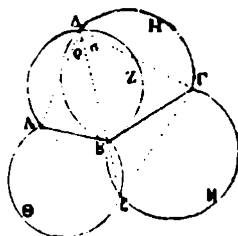
3) Τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ ὀνομάζονται *σημεῖα τοῦ Brocard*.

907. ***Σημείωσις.*** Τὸ ἀνωτέρω ζήτημα, προταθὲν εἰς τὰ Nouv. Annales τὸ 1875, ὑπῆρξεν ἡ ἀπαρχὴ πολλῶν καὶ ἀξιολόγων ἐργασιῶν καὶ αἵτινες, μετὰ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ *σημεῖον* καὶ τοὺς *κύκλους τοῦ Lemoine* (Ν. Α. 1873, σ. 364) ἀποτελοῦν τὰς δύο κυρίας πηγὰς τῆς *Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου*.

Πρόβλημα τοῦ Χάρτου 230

908. **Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ εὑρεθῇ τέταρτον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας ρ καὶ σ.**

Ἑκατέρωθεν τοῦ τμήματος ΑΒ γράφομεν τὰ τόξα ΑΔΖΒ καὶ ΑΘΕΒ μὲ ἐγγεγραμμένας γωνίας εἰς αὐτὰ ἴσας πρὸς ρ· ὁμοίως καὶ τὰ τόξα ΒΔΗΓ καὶ ΒΕΜΓ μὲ ἐγγεγραμμένας γωνίας ἴσας πρὸς σ. Τὰ κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τῶν γραμμῶν αὐτῶν εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.



Σχ. 544.

---

50. Σημ. Μετ. Δὲν ἀνεύρομεν καταλληλότερον ὅρον εἰς τὴν Ἑλληνικήν.

909. *Σημείωσις.* 1) Τὸ *πρόβλημα τοῦ Χάρτου* ἀποδίδεται εἰς τὸν Poth not, ὅστις τὸ ἐδημοσίευσε εἰς τὰ *Mémoires de l'Académie* τὸ 1692, ἂν καὶ οἱ Ἄγγλοι ἀξιοῦν τὴν προτεραιότητα διὰ τοῦ συμπατριώτου των John Collins, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εὑρίσκεται εἰς τὰ *Trancactions Philosophiques*, 1671.

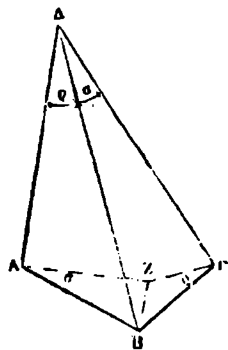
Τοῦ προβλήματος τούτου ἐπελήφθη τὸ 1624 ὁ Snellius εἰς τὸ ἔργον του *Eratosthenes batavus*· ὑποδεικνύει τὴν χρησιμοποίησιν δύο κυκλικῶν τόξων, πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ τετάρτου σημείου, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν ἄλλων σημείων ἀπ' ἀλλήλων (N. A. 1857· *Bulletin*, σ. 89· *Mathesis*, 1884, σ. 64).

Τέλος, λύσιν τοῦ προβλήματος κομψὴν δίδει καὶ ἡ Τριγωνομετρία (*Trigonométrie* ὑπὸ F. J., n° 92).

2) Ὁ G. Bellabitis ὑποδεικνύει τὴν ἀκόλουθον, πολὺ ἁπλῆν κατασκευὴν (Σχ. 545):

Σχηματίζομεν τὰς γωνίας ΒΓΖ = ρ, ΒΑΖ = σ φέρομεν τὴν ΒΖ, καθὼς καὶ τὰς εὐθείας ΑΔ, ΓΔ κατὰ γωνίας ΒΑΔ = ΒΖΓ καὶ ΒΓΔ = ΒΖΑ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ ΒΓΖ καὶ ΒΑΖ, ἀντιστοίχως, καὶ ἐπομένως $\widehat{ΑΔΒ} = ρ$, $\widehat{ΒΔΓ} = σ$.

Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ ἀπορρέει ἐκ τῆς *Μεθόδου τῶν ἰσοδυναμιῶν*. Κατ' αὐτὴν «θεωροῦμεν εὐθύγραμμα τμήματα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀκολούθως, παριστῶντες αὐτὰ διὰ συμβόλων καταλλήλων, ὥστε νὰ ὑποδηλοῦνται δι' αὐτῶν τὰ μεγέθη καὶ αἱ διευθύνσεις των, καὶ ἀναζητοῦντες τὴν ἔκφρασιν τῶν γεωμετρικῶν σχέσεων, τῶν συνδεουσῶν πρὸς ἄλληλα τὰ διάφορα μέρη τῶν σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου, δημιουργοῦμεν οὕτω ἕνα Λογισμὸν (Λογισμὸς τῶν ἰσοδυναμιῶν (Équipollences) καὶ τοῦ ὁποίου οἱ κανόνες εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ ἐκείνους τοῦ συνήθους ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν εὑρισκόμεθα κάτοχοι ἑνὸς ἀναλυτικοῦ ὀργάνου εὐχειρίστου καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαρμογὴ εἶναι γενικωτάτη ἐπὶ παντὸς θέματος τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας». (*Exposition de la méthode des équipollences* ὑπὸ Giusto Bellavitis, μετφρ. C.-A. Laisant).

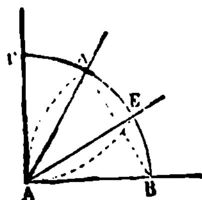


Σχ. 545.

Πρόβλημα 231

910. Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς Β καὶ Γ. Τὰ ἐντὸς τῆς γωνίας σημεῖα τομῆς Δ, Ε τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῶν περιφερειῶν μὲ κέντρα τὰ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν, ὁρίζουν τρεῖς γωνίας ΕΑΒ, ΕΑΔ καὶ ΔΑΓ ἴσας.



Σχ. 546.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΑΕ εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ἑπομένως $\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{ΕΑΒ} = 30^{\circ}$.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τῆς *τριχοτομήσεως μιᾶς τυχούσης γωνίας* ἀποδεικνύεται *ἀδύνατον*, διὰ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου μόνον (βλ. § 501).

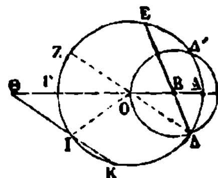
Τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΓΑΔ εἶναι τὸ τρίτον γωνίας 45°.

Πρόβλημα 232

911. Διὰ σημείου Β δοθέντος ἐπὶ διαμέτρου ΑΓ περιφερείας (Ο), νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΔΒΕ τοιαύτη, ὥστε τὸ τόξον ΓΕ νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τόξου ΑΔ.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΔΟΖ ἡ διάμετρος διὰ τοῦ Δ. Θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΓΖ} = \widehat{ΑΔ} = \frac{1}{3}\widehat{ΓΕ} = \frac{1}{2}\widehat{ΖΕ}\cdot$$



Σχ. 547.

Ἀλλ' ἡ γωνία Δ ἔχει ὡς μέτρον $\frac{1}{2}\widehat{ΖΕ}$ καὶ γων. ΒΟΔ = ΓΟΖ, ἥτις ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον $\widehat{ΓΖ} = \frac{1}{2}\widehat{ΖΕ}\cdot$ ἄρα γων. ΒΟΔ = ΒΔΟ, δηλ. τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπομένως:

Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΟ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ σημείου τομῆς Δ αὐτῆς καὶ τῆς δοθείσης φέρομεν τὴν ΔΒΕ χορδήν, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Παρατήρησις. Θὰ πρέπει ΟΒ > ΑΒ. Τὸ σημεῖον Δ' δίδει μίαν δευτέραν λύσιν.

Πρόβλημα 232—Ι

912. Τὸ ἴδιον ζήτημα ἀλλὰ τὸ δοθὲν σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Ι, κοινὸν τῆς δοθείσης περιφερείας (Ο) καὶ τῆς ἐχούσης κέντρον Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν μετὰ τῆς (Ο).

Πράγματι, $\widehat{ΙΘΟ} = \widehat{ΘΟΙ}$ (ἀφοῦ τὸ τρίγωνον ΙΘΟ εἶναι ἰσοσκελές) $= \widehat{ΓΙ}$. Ἀφ' ἑτέρου:

$$\widehat{ΙΘΟ} = \frac{\widehat{ΑΚ} - \widehat{ΓΙ}}{2}\,.$$

Ὥστε: $$\widehat{ΑΚ} = 3\widehat{ΓΙ}.$$

Πρόβλημα 232—ΙΙ

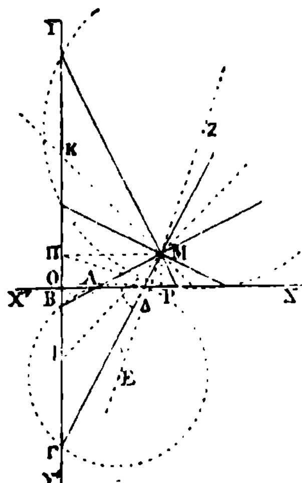
913. Δίδονται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς ΑΔ ἐκ τοῦ ὁποίου τὰ τμήματα ΒΔ, καὶ ΓΔ νὰ φαίνωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

'Ορίζομεν τὸ σημεῖον Γ', συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ'Ο.

Πρόβλημα 232—III

913 α. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ καὶ σημεῖον Μ. Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν διὰ τοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι ΜΑΒ, ΜΔΓ τοιαῦται, ὥστε ἡ γωνία των νὰ εἶναι δοθεῖσα φ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἑπομένως αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΒΟ καὶ ΟΔΓ ἴσαι. Αἱ εὐθεῖαι, ἄρα, ΜΒ, ΜΔ συναντοῦν τὰς ΟΧ καὶ ΥΥ' ὑπὸ ἴσας γωνίας.



Σχ. 548.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἡ ΜΙ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΧΟΥ καὶ νὰ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ, κατὰ γωνίας πρὸς τὴν ΜΙ ἴσας πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας φ.

Παρατήρησις. Ἡ παράλληλος ΜΚ πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΧΟΥ' παρέχει δευτέραν λύσιν. Διὰ τὸ πρῶτον μέρος, οἱ ἄξονες ΟΧ, ΟΥ δύνανται νὰ εἶναι τυχόντες.

913 β. ***Σημείωσις.*** 1) Τῶν ἀξόνων ὄντων ὀρθογωνίων, ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ διάφορα τετράπλευρα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς γωνίας φ, εἶναι εὐθεῖα διὰ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΡΠ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΡΜΠ· ἡ διαγώνιος αὐτὴ εἶναι ὁ κοινὸς ῥιζικὸς ἄξων πασῶν τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν.

2) Ὁ τόπος τῶν κέντρων Ε, Ζ τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν (ἐστιγμένων εἰς τὸ σχῆμα), διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τῆς γωνίας φ καὶ ὅταν τὸ σημεῖον Μ γράφῃ περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ο, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων ἐλλείψεων, ἐχουσῶν τὸ Ο κοινὸν κέντρον καὶ τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες διευθύνονται κατὰ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ΧΧ', ΥΥ'.

Πρόβλημα 233

914. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΧΥ νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο δοθείσας περιφερείας (Α) καὶ (Β) νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς ΧΥ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 147).

Πρόβλημα 233—I

915. Δίδονται εὐθεῖα ΧΥ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας κείμενα. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΧΥ τοιοῦτον ὥστε $\widehat{ΑΓΧ} = 2\widehat{ΒΓΥ}$.

Ἡ λύσις εἶναι ἁπλουστάτη διὰ τῆς συμμετρίας (§ 145).

Πράγματι, ἡ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐφαπτομένη πρὸς τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ συμμετρικὸν Β' τοῦ σημείου Β πρὸς τὴν ΧΥ καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς, τέμνει τὴν ΧΥ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἐπειδὴ

γων. ΒΓΥ = Β'ΓΥ = Β'ΓΔ·

ἑπομένως:

γων. $ΒΓΥ = \frac{1}{2} ΔΓΥ = \frac{1}{2} ΑΓΧ.$

Σχ. 549.

Πρόβλημα 233—II

916. Τὰ ἴδια δεδομένα. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΧΥ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΧ καὶ ΒΓΥ νὰ εἶναι δοθεῖσα γωνία φ. Ποῖον τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ;

Εἶναι τὸ Γ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΧΥ καὶ τοῦ τόξου (Α, Β, 180°—φ).

Τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος φ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ παραπληρώματός του 180° — φ, δηλ. εἰς τὴν μεγίστην γωνίαν ΑΓΒ, καὶ τοῦτο λαμβάνεται ὅταν τὸ τόξον ΑΓΒ ἐφάπτεται τῆς ΧΥ. Ὑπάρχουν δύο λύσεις· ἐν τούτοις, ἡ γραφὴ τοῦ τόξου αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ III Βιβλίου.

Πρόβλημα 233—III

916 α. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς ΒΔ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα ΒΔ νὰ φαίνεται ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν διπλασίαν τῆς ΔΟΓ.

Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Γ', συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΔ, γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Γ' καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΟ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΔ, θὰ ἔχωμεν ἐν γένει δύο λύσεις.

Πρόβλημα 234

917. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐξ οὗ δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι (Α) καὶ (Β) φαίνονται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.

Δι' ἑκάστην τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, γράφομεν τὸν τόπον τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων ἡ περιφέρεια αὕτη φαίνεται ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (§ 775). Αἱ δύο, ἐν γένει, τομαὶ τῶν τόπων αὐτῶν εἶναι δύο σημεῖα Γ, Δ κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Σχ. 550.

Παρατήρησις. Ἡ τέμνουσα ΜΚ ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς ἴσας χορδὰς τῶν περιφερειῶν (Α) καὶ (Β). Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΛΙ, ΜΙ καὶ ΚΛ τεμνούσας. (Βλ. ἐπμ. § 1259 β, 2).

Πρόβλημα 234—I

918. **Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἐξ οὗ τρεῖς ἴσαι περιφέρειαι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.**

Εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν κέντρων τῶν τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

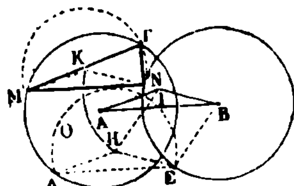
Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἄνισοι, τὸ πρόβλημα ἀνήκει εἰςτὸ III Βιβλίον. (Βλ. ἐπμ. § 1359).

Πρόβλημα 234—II

919. **Δίδονται δύο ἴσαι περιφέρειαι (Α), (Β) καὶ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΜΝ, παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΜΓΝ νὰ ἔχῃ δοθὲν μέγεθος φ.**

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἴσης καὶ παραλλήλου τῆς ΑΒ, γράφομεν τόξον ΔΟΕ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς φ καὶ ἐκτελοῦμεν μίαν παράλληλον μεταφορὰν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τόξον τοῦτο νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ.



Σχ. 551.

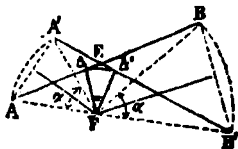
Τὴν θέσιν τῆς ΜΝ ὁρίζομεν καὶ ἄλλως:

Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΙΒ ἴσον πρὸς τὸ ΔΗΕ (Η τὸ κέντρον τοῦ τόξου ΔΟΕ). Τὸ τετράπλευρον ΗΕΒΙ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἀκολούθως, μὲ κέντρον Ι καὶ ἀκτῖνα ΙΗ γράφομεν περιφέρειαν καὶ θεωροῦμεν τὴν τομὴν Κ αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΔΗ.

Τὸ σημεῖον Κ θὰ εἶναι ἡ νέα θέσις τοῦ κέντρου Η τοῦ τόξου ΔΟΕ (κατὰ τὴν προηγουμένην μεταφοράν), καὶ αἱ τομαὶ Μ, Ν, τῆς περιφερείας (Κ, ΚΓ) καὶ τῶν δοθεισῶν ὁρίζουν τὴν χορδὴν ΜΝ, ἴσην καὶ παράλληλον τῆς ΑΒ.

Πρόβλημα 234—III

920. **Δίδονται δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, Α'Β', καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ ΑΒ εἰς σύμπτωσιν πρὸς τὴν Α'Β' διὰ στροφῆς περὶ κατάλληλον καὶ ζητούμενον κέντρον.**



Σχ. 552.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΑ' καὶ ΒΒ', ὡς καὶ τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν ὁμωνύμων τμημάτων. Τὸ κοινὸν σημεῖον Γ τῶν καθέτων εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

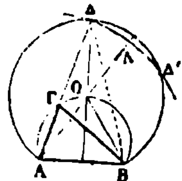
Πράγματι, ΓΑ = ΓΑ', ΓΒ = ΓΒ', ὡς πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου· τὰ τρίγωνα, ἄρα, ΑΓΒ, Α'ΓΒ' εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας.

Πρόβλημα 235

921. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ΑΟΒ καὶ ζητεῖται τρίτον ἀπ' αὐτῆς σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΓΑ + ΓΒ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

Ἔστω Γ τὸ σημεῖον. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΓΔ=ΓΒ, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΓΔ ἡ γωνία ΓΔΒ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΓΒ. Εἶναι, ἄρα, τὸ σημεῖον Δ τομὴ τῆς περιφερείας

$\left(\text{Α, Β, } \frac{\widehat{\text{ΑΓΒ}}}{2}\right)$ καὶ τῆς (Α, λ).



Σχ. 553.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ μέσον Ο τοῦ τόξου ΑΟΒ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΑΔΒ· ἐπειδὴ ἡ γωνία Ο εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ΑΔΕ τόξον.

2) Τὸ μέγιστον τοῦ μήκους λ δίδεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΟΛ.

3) Τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεως ΑΒ, τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Γ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Γ.

Πρόβλημα 235—Ι

922. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον Γ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ ΓΒ — ΓΑ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

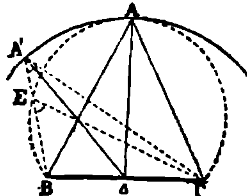
Λύσις ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην· ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς τὸ βοηθητικὸν τόξον θὰ εἶναι $90^\circ + \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

Πρόβλημα 236

923. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ βάσις ΒΓ καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν διάμεσος ἔχουν μήκη ὡρισμένα· πῶς μεταβάλλεται ἡ γωνία Α;

Διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις, ἀναλόγως τῆς σχέσεως τῶν δοθέντων μηκῶν πρὸς ἄλληλα.

1) *Ἡ διάμεσος ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως ΒΓ.*

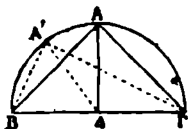


Σχ. 554

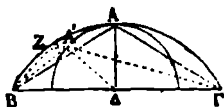
Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ δίδει τὴν μεγίστην γωνίαν Α· ἐπειδή, γράφοντες τὸ κυκλικὸν τόξον ΒΑΓ μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ Α καὶ τὴν περιφέρειαν ΑΑ' μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμεσον ΔΑ, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἡ γωνία Α' εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας Ε, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὴν $\widehat{\text{Α}}$.

Ἐλαττοῦται λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ ἀπὸ τῆς θέσεως Α καὶ μηδενίζεται ὅταν ἡ κορυφή της ἔλθῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως.

2) *Ἡ διάμεσος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως* (Σχ. 555).
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἡ γωνία Α παραμένει σταθερά.



Σχ. 555.



Σχ. 556.

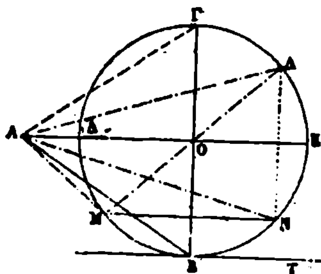
3) *Ἡ διάμεσος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως* (Σχ. 556).
Τὸ ἰσοσκελὲς πάλιν τρίγωνον δίδει τὴν ἐλαχίστην γωνίαν Α.
Ἐπειδὴ $\widehat{BA'\Gamma} > \widehat{BZ\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}$ Ἡ γωνία Α αὐξάνει καὶ τείνει πρὸς τὰς 180°, ἐφ' ὅσον ἡ κορυφὴ πλησιάζει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὴν βάσιν.

Πρόβλημα 237

924. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ ὀλισθαίνει ἐπὶ μιᾶς ἀπεράτου εὐθείας. Εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτοῦ, συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὰ ἄκρα του πρὸς δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενα. Μελετήσατε τὰς μεταβολὰς τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΒΜ.
(Βλ. *Μέθοδοι*, § 253).

Πρόβλημα 237—1

925. Εἰς περιφέρειαν, δίδεται σταθερὰ διάμετρος ΔΟΕ καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς. Φέρομεν χορδὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον. Διὰ ποίας θέσεις τῆς χορδῆς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΑΟ καὶ ΝΑΟ γίνεται μέγιστον;



Σχ. 557.

Φέροντες τὴν διάμετρον ΜΟΛ, ἀναγόμεθα εἰς προηγούμενον θέμα (§ 923, 1ον).
Ἐπειδὴ $\widehat{MAO} + \widehat{NAO} = \widehat{MA\Lambda}$, εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΜΑΛ ἡ βάσις ΜΛ καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν διάμεσος ΟΑ διατηροῦν σταθερὰ μήκη καὶ πρὸς τούτοις συμβαίνει $OA > \frac{M\Lambda}{2} = O\Lambda$.
Γίνεται, λοιπόν, ἡ γωνία Α μεγίστη διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ (ὁπότε ἡ παράλληλος χορδὴ ΜΝ ἀποβαίνει ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας) καὶ θὰ ἔχωμεν πάντοτε $\widehat{BA\Gamma} = 2(\widehat{BAO}) > \widehat{MAO} + \widehat{NAO}$.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιφερείας, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα (§ 923, 3ον).

Πρόβλημα 238

926. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ σημεῖον Ο. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ πρέπει νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα ἡ γωνία ΓΟΔ γίνῃ μεγίστη;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 216).

Πρόβλημα 238—1

927. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ σημεῖον Ο. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΓΔ, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΓΟΔ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 272).

Πρόβλημα 239

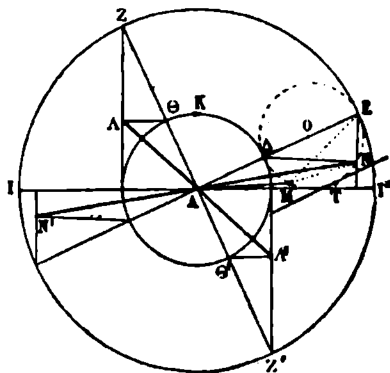
928. Δίδονται περιφέρεια καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ. Διὰ ποῖον σημεῖον Α τῆς περιφερείας ἡ γωνία ΓΑΔ γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 341).

Πρόβλημα 240

929. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ὀρθὴ γωνία ΕΑΖ, μὲ τὴν κορυφὴν Α εἰς τὸ κοινὸν κέντρον. Προβάλλομεν τὰ σημεῖα Ε, Ζ ἐπὶ μιᾶς σταθερᾶς διαμέτρου καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Θ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΔΝ, ΘΛ. Διὰ ποίαν θέσιν τῆς ὀρθῆς γωνίας ΕΑΖ ἡ γωνία ΛΑΝ γίνεται μεγίστη; (Ν. Α. 1861, σ. 21).

Τὸ μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα $\widehat{ΛΑΘ} + \widehat{ΔΑΝ}$. Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸ πρόβλημα εἰς ἕνα ἄλλο γνωστόν, γράφομεν περιφέρειαν ἐπὶ τῆς ΔΕ ὡς διαμέτρου καὶ λαμβάνομεν ΔΜ = ΘΛ.



Σχ. 558.

Τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ΘΛΖ, ΕΝΔ, ΔΜΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ τὰ μὲν δύο πρῶτα τὰς γωνίας ἴσας, τὸ δὲ πρῶτον καὶ τρίτον τὴν ΔΜ = ΘΛ. Ἑπομένως, ΔΜ = ΘΛ = ΕΝ καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΔΑΜ καὶ ΑΛΘ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΔ = ΑΘ, ΔΜ = ΘΛ καὶ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ πρώτου ΖΘΛ = ΑΕΝ = ΜΔΕ = ἐξωτερικὴν τοῦ δευτέρου. Εἶναι,

ἑπομένως $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΘΑΛ}$ καὶ τὸ ἄθροισμα $\widehat{ΛΑΘ} + \widehat{ΔΑΝ}$ δυνάμεθα νὰ τὸ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ $\widehat{ΔΑΜ} + \widehat{ΔΑΝ}$.

Ἀλλά, κατὰ τὸ πρόβλημα τῆς § 925, τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ ΜΝ χορδὴ γίνῃ ἐφαπτομένη ἢ $\widehat{ΔΕΤ} = 45°$ καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΝ θὰ μένῃ κάθετος πάντοτε ἐπὶ τὴν σταθερὰν διάμετρον, ἕπεται ὅτι, εἰς τὴν θέσιν ΕΤ, ἡ γωνία ΕΑΙ' θὰ εἶναι ἴση πρὸς 45°. Ὥστε:

Ἡ μεγίστη γωνία ΛΑΝ *λαμβάνεται διὰ θέσιν τῆς* ΑΕ *σχηματίζουσαν γωνίαν 45° πρὸς τὴν σταθερὰν διάμετρον* ΙΙ'.

930. Παρατήρησις. Αἱ εὐθεῖαι ΛΛ', ΝΝ' εἶναι, ὡς γνωστόν, δύο συζυγεῖς διάμετροι τῆς ἐλλείψεως μὲ ἡμιάξονας ΑΙ' καὶ ΑΚ. Ἑπομένως: *Ἡ μεγίστη γωνία δύο συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως εὑρίσκεται διὰ προβολῆς* ([51]) *δύο καθέτων διαμέτρων τῆς περιφερείας* ΑΙ' ([52]), *κεκλιμένων κατὰ 45° πρὸς τὴν διάμετρον* ΙΙ'.

Ἡ γωνία ΝΑΛ' εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΝΑΛ· οὕτω, εἰς τὴν θέσιν μεγίστης γωνίας ἀντιστοιχεῖ καὶ ἡ θέσις ἐλαχίστης γωνίας.

Εὐθεῖαι καὶ περιφέρειαι τεμνόμεναι

931. Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια. Ἡ γωνία περιφερείας καὶ τεμνούσης αὐτὴν εἶναι ἡ γωνία τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας εἰς ἓν τῶν σημείων τομῆς (§ 619).

Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι καὶ φέρωμεν ἐφαπτομένας ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν:

α) *Αἱ ἐπ' αὐτῶν χορδαὶ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας εἶναι ἴσαι.*

β) *Ἑκάστη ἐφαπτομένη τέμνει τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν κατὰ σταθερὰν γωνίαν.*

932. Δύο περιφέρειαι. Ἡ γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν εἰς ἓν τῶν σημείων τομῆς (§ 619), ἢ ἡ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι καὶ θεωρήσωμεν τὰς περιφερείας μὲ κέντρα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν ρ καὶ τεμνούσας τὴν ἄλλην:

α) *Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν τεμνομένων περιφερειῶν εἶναι σταθερόν.*

β) *Ἡ γωνία καθ' ἣν τέμνονται αἱ περιφέρειαι εἶναι σταθερά.*

Πρόβλημα 241

933. Διὰ δοθέντος σημείου Α, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ ὡρισμένην γωνίαν μ.

Εἰς τυχὸν σημεῖον Β τῆς περιφερείας σχηματίζομεν τὴν γω-

---

51. Σημ. μετ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως.
52. Σημ. μετ. Τοῦ πρωτεύοντος κύκλου τῆς ἐλλείψεως.

νίαν μ δι' ἐφαπτομένης ΒΤ καὶ χορδῆς ΒΔ. Φέρομεν ἀκολούθως ἐφαπτομένην ΑΖΘ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ΓF. Θὰ ἔχωμεν:

$$\mu = \widehat{AZK}.$$

Παρατήρησις. Ἀντὶ τῆς ἀγωγῆς τῆς ἐφαπτομένης, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ κατεσκευάζωμεν τὴν γωνίαν ΓΒΔ, συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης μ.

Σχ. 559.

Πρόβλημα 241—I

934. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας περιφερείας κατὰ δοθείσας γωνίας.

Ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ προηγουμένως καὶ φέρομεν κοινὴν ἐφαπτομένην πρὸς τὰς δύο βοηθητικὰς περιφερείας.

Πρόβλημα 241—II

935. Νὰ γραφῇ περιφέρεια (Ο) τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθέντος τριγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν μ.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ γωνία ΖΔΕ = μ.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα, ὡς τὸ ΟΛΔ, εἶναι προφανῶς ἴσα, αἱ τρεῖς χορδαί, ΔΕ, Δ'Ε' Δ''Ε'' εἶναι ἴσαι. Ἀπέχει λοιπὸν τὸ κέντρον Ο τῆς ζητουμένης περιφερείας ἴσον τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ συμπίπτει, ἑπομένως, πρὸς τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον. Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας (Ο) εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΛ, μὲ πλευρὰν ΟΛ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ γωνίαν εἰς τὸ Δ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης μ.

Σχ. 560

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τέσσαρας λύσεις, ἀντιστοίχους τῶν κέντρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον περιφερειῶν.

2) Ἀνάγεται εἰς ἤδη λυθὲν πρόβλημα (§§ 881, 881 α).

Πρόβλημα 242

936. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ ἄλλης δοθείσης εὐθείας (ε') νὰ ἔχῃ ὡρισμένον μέγεθος α.

Σχ. 561.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΟΡ τοῦ ζητουμένου κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας (ε') εἶναι

εὔκολον νὰ ὁρισθῇ. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΡΔ, μὲ ὑποτείνουσαν ρ καὶ γωνίαν εἰς τὸ Δ ἴσην πρὸς τὸ συμπλήρωμα τῆς δοθείσης α. Ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος πρὸς τὴν (ε΄) τέμνει τὴν (ε) εἰς τὸ κέντρον Γ τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 242—I

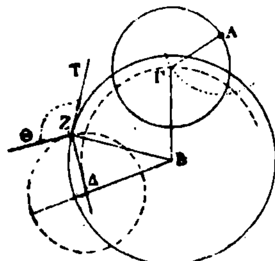
937. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος, τεμνομένη κατὰ γωνίας φ καὶ σ ὑπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

Λύσις ὁμοία πρὸς τὴν προηγουμένην.

Πρόβλημα 243

938. Νὰ γραφῇ περιφέρεια (Γ) δοθείσης ἀκτῖνος, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν (Β) κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν (Γ), τῶν τεμνουσῶν κατὰ γωνίαν φ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ἐφαπτομένην ΖΤ σχηματίζουσαν γωνίαν ΤΖΘ ἴσην πρὸς φ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΖΘ λαμβάνομεν μῆκος ΖΔ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ. Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΔ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

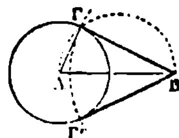


Σχ. 562.

Ἀκολούθως, γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ρ. Τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ τῆς προηγουμένης εἶναι κέντρα περιφερειῶν κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 244

939. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐκ σημείου Β ἐφαπτομένη πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 563.

Ἀρκεῖ νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου, ὡς καὶ ἡ ἔχουσα κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα λ. Τὰ κοινὰ σημεῖα Γ, Γ΄ αὐτῶν ὁρίζουν τὴν ἀκτῖνα ΑΓ = ΑΓ΄ τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 244—I

940. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχουν κοινὸν μῆκος δοθὲν λ.

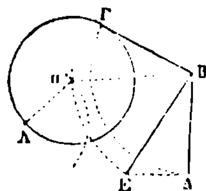
Τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας εἶναι καὶ τῆς ζητουμένης τὸ κέντρον. Προηγούμενον πρόβλημα.

Πρόβλημα 244—II

941. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐξ ἄλλου σημείου Β ἐφαπτομένη πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΟ εἶναι κατασκευάσιμον· ἐπειδὴ εἶναι γνωστὰ τὰ μήκη τῶν ΒΓ καὶ ΓΟ. Τὸ σημεῖον Ο λοιπὸν εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν (Β, ΒΟ) καὶ (Α, ρ).

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς γενικωτέρου (ἐπμ., § 944).



Σχ. 564.

Πρόβλημα 244—III

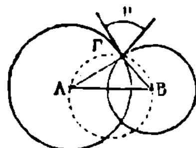
942. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχουν μήκη δοθέντα λ καὶ μ.

Τὸ κέντρον εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν (Β, ΒΟ) καὶ (Α, ΑΟ), ὅπου ΒΟ, ΑΟ, ὑποτείνουσαι ὀρθογωνίων τριγώνων κατασκευασίμων κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

Παρατήρησις. Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς γενικώτερον ἄλλον (§ 945).

Πρόβλημα 244—IV

943. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Α καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν (Β) κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν μ.



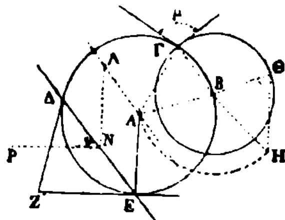
Σχ. 565.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ $\widehat{\Gamma} = \mu$.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ Γ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ἡ γωνία ΑΓΒ = 180° — μ. Τὸ σημεῖον Γ, ἑπομένως, εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας (Β) καὶ τοῦ τόξου (Α, Β, 180° — μ). ΑΓ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 245

944. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν (Β) κατὰ γωνίαν μ καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΔΕ κατὰ γωνίαν ν.



Σχ 566.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ (Α) ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια.

α) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι κατασκευάσιμον, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας (Β), ΑΓ = ρ καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ = 180° — μ· ὁρίζεται, ἑπομένως τὸ μῆκος ΒΑ καὶ τὸ κέν-

τρον Α θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Β, ΒΑ).

β) Κατασκευάζομεν γωνίαν ΡΝΔ = ν καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ν ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΝ τμῆμα ΝΛ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ. Ἡ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ τέμνει τὴν περιφέρειαν (Β, ΒΑ) εἰς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας (Α).

Πρόβλημα 245—I

945. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας περιφερείας κατὰ γωνίας μ καὶ ν, ἀντιστοίχως.

Τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον.

Εἰδικὴ περίπτωσις. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας* (§ 942).

Ἐφαπτόμεναι καὶ συναρμογαὶ γραμμῶν [53]

946. Ἡ συναρμογὴ εὐθειῶν γραμμῶν ἢ κυκλικῶν τόξων ἀνάγεται εἰς προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς περιφερείας καὶ ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας παρέχουν εὐκόλως τὰς λύσεις τῶν ἑπομένων προβλημάτων:

Συναρμογὴ δύο εὐθειῶν γραμμῶν (§§ 197,200).

Συναρμογὴ εὐθείας καὶ κυκλικοῦ τόξου (§§ 179,201).

Πολλῶν προβλημάτων τοῦ εἴδους αὐτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιληφθῶμεν παρὰ μετὰ τὴν κατοχὴν τοῦ III Βιβλίου.

Πρόβλημα 246

947. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος καὶ ἐφαπτομένη:

α) *Δύο εὐθειῶν.*

β) *Εὐθείας καὶ περιφερείας.*

γ) *Δύο περιφερειῶν.*

Νὰ διερευνηθῇ ἡ τελευταία περίπτωσις.

Τὸ πρόβλημα (γ) συνίσταται εἰς τὴν *εὕρεσιν σημείου κειμένου εἰς δοθεῖσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ δύο εὐθειῶν ἢ περιφερειῶν.*

(Βλ. *Διερευνήσεις*, § 252).

Πρόβλημα 247

948. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας ΧΥ.

Ἔστω ΑΒΓ ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ Ε τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Β πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΥ. Ζητήσωμεν τὴν τιμὴν τῆς γωνίας ΑΓΕ.

---

53. Σημ. μετ. Συναρμογὴ (raccordement) δύο γραμμῶν (ΑΒ) καὶ (ΓΔ) εἶναι ἡ ἕνωσις δύο περάτων αὐτῶν Α, Γ διὰ γραμμῆς (Κ) ἐχούσης εἰς τὰ Α καὶ Γ ἐφαπτομένας συμπιπτούσας πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῶν γραμμῶν (ΑΒ), (ΓΔ) εἰς τὰ σημεῖα αὐτά.

Ἔχομεν

$$\widehat{\mathrm{A\Gamma E}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma Y}} + \widehat{\mathrm{\Delta\Gamma E}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma Y}} + \widehat{\mathrm{\Delta\Gamma B}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma Y}} + \widehat{\mathrm{\Delta A\Gamma}},$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{\mathrm{A\Gamma Y}} + \widehat{\mathrm{\Delta A\Gamma}}$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Δ,

$$\widehat{\mathrm{A\Gamma E}} = 180^\circ - \widehat{\Delta}.$$

Τὸ σημεῖον, ἄρα, Γ εἶναι τομὴ τῆς ΧΥ καὶ τοῦ τόξου (Α, Ε, $180^\circ - \widehat{\Delta}$). (E. Lemoine, J. M. E. 1879, σ. 21).

Σχ. 567.

Πρόβλημα 247–I

949. Νὰ ἐγγραφῇ περιφέρεια εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον, παρατηροῦμεν εὐκόλως, ὅτι ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ μέσον Γ τοῦ δοθέντος τόξου ΒΓΔ καὶ νὰ ἐγγράψωμεν περιφέρειαν εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΖΓΕ.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν ἐγγραφὴν περιφερείας εἰς τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον ΛΑΗ.

Σχ. 568.

Πρόβλημα 248

950. Δίδεται περιφέρεια (Α) καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα κέντρον σημεῖον Β καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν δύο περιφερειῶν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

Ἔστω ΓΔ = λ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΔΕ λαμβάνομεν ΑΕ = λ. Ἐπομένως:

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν καὶ τέμνομεν αὐτὴν κατὰ τὸ σημεῖον Ε διὰ τῆς περιφερείας (Α, λ). Ἐπὶ τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΔ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας. ΒΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ τμῆμα ΕΔ εἶναι ὁμόρροπον τοῦ ΒΕ, ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἶναι ἐξωτερική· ἄλλως, εἶναι ἐσωτερική.

Σχ. 569.

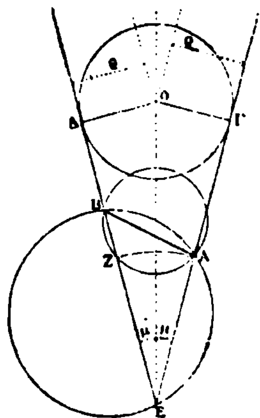
Πρόβλημα 248–I

951. Ὁμοία ἐκφώνησις *ἀλλὰ αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι νὰ τέμνωνται κατὰ γωνίαν δοθεῖσαν 2 φ.*

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι πάλιν κατασκευάσιμον, ἀφοῦ ἡ ΑΒ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ = φ.

Πρόβλημα 249

952. Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτὴν νὰ σχηματίζουν γωνίαν 2μ, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν μηκῶν των νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος λ.



Σχ. 570.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ $ΑΓ - ΒΔ = λ$, $\widehat{ΑΕΒ} = 2μ$.

Ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΕΒ τμῆμα $ΕΖ = ΕΑ$, θὰ ἔχωμεν: $ΒΖ = λ$,

$$ΑΖΒ = 180^\circ - ΑΖΕ =$$

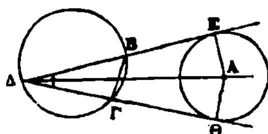
$$= 180^\circ - (90^\circ - φ) = 90^\circ + μ$$

καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΖ θὰ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ μίαν γωνίαν αὐτοῦ.

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, προεκτείνομεν τὴν ΒΖ πλευρὰν μέχρι τῆς συναντήσεώς της Ε μετὰ τοῦ κυκλικοῦ τόξου (Α,Β, 2μ) καὶ ἐγγράφομεν, κατὰ τὸν ὑποδηλούμενον εἰς τὸ σχῆμα τρόπον, περιφέρειαν (Ο, ρ) ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΕΑ.

Πρόβλημα 249—I

953. Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον Α τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐκ τῶν Β καὶ Γ ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτὴν νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν φ.

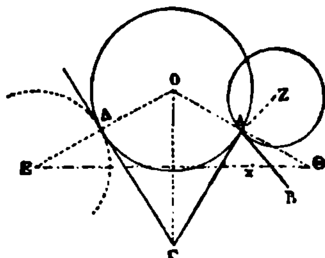


Σχ. 571.

Γράφομεν τὸ κυκλ. τόξον (Β,Γ,φ) καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ εἰς τὸ μέσον του Δ. Αἱ ἐκ τοῦ Α κάθετοι ΑΖ, ΑΘ ἐπὶ τὰς ΔΒ, ΔΓ, εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ ἡ ΔΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΔΓ. Τὸ κοινὸν μῆκος των ὁρίζει τὴν ἀκτῖνα τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Πρόβλημα 250

954. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας ΓΔ καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν, εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς, κατὰ γωνίαν α.



Σχ. 572.

Εἰς τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ κατασκευάζομεν γωνίαν $ΒΑΓ = α$. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ζητουμένης περιφερείας, τὸ κέντρον της Ο θὰ εὑρί-

σκεται εἰς τὴν τομὴν τῆς καθέτου εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν ΔΓ καὶ ΑΓ.

Πρόβλημα 250—I

955. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (Ε) (Σχ. 572) καὶ τέμνουσα ἄλλην (Ζ), εἰς δοθὲν αὐτῆς σημεῖον Α, κατὰ γωνίαν α.**

Ὡς καὶ προηγουμένως, ἀλλὰ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τώρα τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, λαμβάνομεν μῆκος ΑΘ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας (Ε) καὶ ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΘ.

Πρόβλημα 250—II

956. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (Α) καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν ἄλλην (Β).**

Ἔστωσαν α, β αἱ ἀκτῖνες τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης.

Ἡ ἀπόστασις ΑΟ τῶν κέντρων τῶν ἐφαπτομένων περιφερειῶν εἶναι α ± ρ.

Ἡ ἀπόστασις ΟΒ τῶν ὀρθογωνίως τεμνομένων περιφερειῶν εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας β καὶ ρ.

Πρόβλημα 251

957. **Νὰ συναρμοσθοῦν δύο εὐθύγραμμοι ἢ κυκλικαὶ γραμμαὶ διὰ κυκλικοῦ τόξου δοθείσης ἀκτῖνος ρ.**

Δι' ἑκάστην τῶν δοθεισῶν γραμμῶν, γράφομεν τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν ἀκτῖνος ρ καὶ ἐφαπτομένων τῆς γραμμῆς. Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο τόπων ὁρίζουν τὰ κέντρα τῶν ζητουμένων τόξων.

Τὰ σημεῖα συναρμογῆς ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων ἐκ τοῦ εὑρεθέντος κέντρου ἐπὶ τὰς γραμμάς.

958. Παρατήρησις. Ἡ συναρμογὴ γραμμῶν εἶναι μεγάλης χρησιμότητος εἰς ὅλα τὰ πρακτικὰ προβλήματα, ἅτινα ἐμφανίζονται εἰς τὸ γραμμικὸν σχέδιον. Ἐξαιρετικὸν ἐπίσης ἐνδιαφέρον παρουσιάζει κατὰ τὰς ἐργασίας χαράξεως ὁδῶν. Ἐν τούτοις, ἡ ἐπίλυσις τῶν σχετικῶν προβλημάτων ἀπαιτεῖ πολλάκις γνώσεις πολὺ μᾶλλον ἐκτεταμένας τῶν στοιχειωδῶν.

Πρόβλημα 252

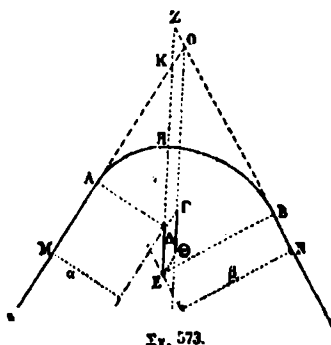
959. **Νὰ συναρμοσθοῦν δύο εὐθεῖαι διὰ τόξων ἐφαπτομένων ἀλλήλων, ἐχόντων ἀκτῖνας α καὶ β καὶ ἴσας ἀντιστοίχους ἐπικέντρους γωνίας.**

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΗ=ΒΕΗ.

Ἕνεκα τῶν ἴσων γωνιῶν, τὸ τρίγωνον ΖΟΚ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ διάκεντρος ΕΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Ο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Ἀφ' ἑτέρου, αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων Δ καὶ Ε ἀπὸ τὰς ἰδίας εὐθείας εἶναι γνωσταί, καθὼς καὶ ἡ ἀπόστασις ΕΔ, ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων α καὶ β.

Ἐκ τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κα-

τασκευήν: φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας, εἰς ἀποστάσεις α καὶ β ἀντιστοίχως ἀπ' αὐτῶν, καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Ο. Ἂν Γ εἶναι ἡ τομὴ μιᾶς τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων καὶ τῆς διχοτόμου, λαμβάνομεν τμῆμα ΓΘ = ΔΕ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΔΓΘΕ. Αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Ε τούτου εἶναι τὰ κέντρα τῶν ζητουμένων τόξων καὶ οἱ πόδες Α καὶ Β τῶν ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε καθέτων ἐπὶ τὰς δοθείσας εὐθείας τὰ σημεῖα συναρμογῆς.



Σχ. 573.

Πρόβλημα 252—I

960. Νὰ **συναρμοσθοῦν δύο εὐθεῖαι διὰ κυκλικῶν τόξων ἐφαπτομένων ἀλλήλων, ὅταν εἶναι γνωστά:**

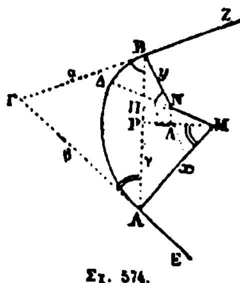
α) *Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ἡ ἀκτὶς α καὶ ἡ γωνία ΑΔΗ* (Σχ. 573).
β) *Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ μία ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς συναρμογῆς.*
γ) *Τὸ σημεῖον συναρμογῆς Η καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες.*
δ) *Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων* (Βλ. ἐπμ. § 1655 β).

Πρόβλημα 252—II

961. Νὰ **συναρμοσθοῦν δύο εὐθεῖαι διὰ τόξων ἀντιθέτων καμπυλοτήτων καὶ χωριζομένων ἀπ' ἀλλήλων διὰ εὐθυγράμμου τμήματος μήκους λ.**

962. *Σημείωσις.* Τὰ προηγούμενα προβλήματα, §§ 960, 961, ἐμφανίζονται συχνότατα κατὰ τὴν χάραξιν τῶν ὁδῶν καὶ τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις μεγάλης σπουδαιότητος, ὁ χειρισμός των γίνεται διὰ τῆς Ἀναλύσεως. (Βλ. σχετικῶς *Arpentage, Levé des plans, Nivellement*, ὑπὸ F. G. M., 3η, 4η, 5η ἐκδ., nº 613-618).

Ἐνταῦθα, θὰ περιορισθῶμεν νὰ δώσωμεν τοὺς κυριωτέρους μόνον τύπους.



Σχ. 574.

Συναρμογὴ διὰ κυκλικῶν τόξων ἀνίσου ἀνοίγματος καὶ ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς ἀλλήλων (Σχ. 574).

1) Μεταξὺ τῶν ἀκτίνων x, y τῶν τόξων καὶ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$\gamma (x\ \eta\mu\ A + y\ \eta\mu\ B) - 2xy\ \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} = \frac{\gamma^2}{2},$$

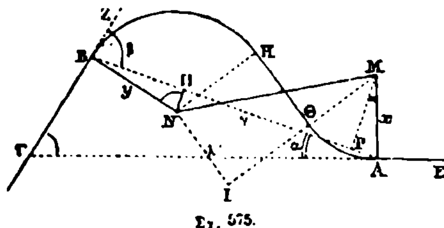
γραφομένη καὶ εἰς τὴν μορφὴν

$$(\alpha x + \beta y)\ \eta\mu\ \Gamma - 2xy\ \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} = \frac{\gamma^2}{2}.$$

2) Ἐὰν τὰ τόξα ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἡ σχέσις εἶναι

$$\gamma(x\ \eta\mu\ A + y\ \eta\mu\ B) + 2xy\ \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = \frac{\gamma^2}{2}.$$

3) Κατὰ τὴν χάραξιν τῶν σιδηρογρομικῶν γραμμῶν, *δύο τόξα ἀντιθέτων καμπυλοτήτων ὀφείλουν νὰ χωρίζωνται δι' εὐθυγράμμου τμήματος μήκους λ* (Σχ. 575).



Σχ. 575.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὁ τύπος εἶναι

$$\gamma(x\ \eta\mu\ A + y\ \eta\mu\ B) + 2xy\ \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} = \frac{\gamma^2 - \lambda^2}{2}.$$

4) Τὸ ἐλάχιστον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων x, y (Σχ. 574), ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἐφαπτομένη τῶν τόξων συναρμογῆς εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Δ εἶναι παράλληλος τῆς χορδῆς ΑΒ.

Τὰς ἀκτῖνας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ γραφικῆς κατασκευῆς. Ἐπίσης, εἰς τὴν περίπτωσιν τόξων ἀντιθέτων καμπυλοτήτων, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γραφικῶς δύο κυκλικὰ τόξα ἐφαπτόμενα τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος. Εἶναι ὅμως πάντοτε προτιμότερον νὰ ἀνατρέχωμεν εἰς τὸν Λογισμόν. (Endrès, *Manuel des Conducteur des ponts et chaussées*, τόμ. II, nº 103, 107. *Traité de Géodésie*, par G. Oslet, nºs 1253, 1254).

883. *Σπουδὴ ἐπὶ τῆς συναρμογῆς δύο εὐθειῶν* ΑΧ, ΒΥ *διὰ κυκλικῶν τόξων.*

1) Ἔστωσαν ΑΜ, ΒΜ δύο κυκλικὰ τόξα κέντρων α καὶ β, ἐφαπτόμενα ἀλλήλων εἰς τὸ Μ καὶ τῶν ΑΧ, ΒΥ εἰς τὰ Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης των ΔΕ λαμβάνομεν

(1) $$\Delta A = \Delta M, \quad EM = EB.$$

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΔΜ, ΒΕΜ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ι, κέντρον τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ καὶ κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΔΓΕ. Ἡ περιφέρεια αὕτη (γ) ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, M_1, καὶ ἑπομένως

(2) $$\Delta A_1 = \Delta M_1, \quad EB_1 = EM_1,$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ἀμέσως:

$$MM_1 = AA_1 = BB_1 = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2},$$

καί, ἑπομένως, ἐὰν Η, Κ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν Αα, Ββ καὶ τῆς διχοτόμου ΓΙ, θὰ ἔχωμεν

$$IH = IK.$$

Ἡ σχέσις αὐτη δεικνύει, ὅτι *τὸ σημεῖον* Ι, μέσον τοῦ τμήματος ΗΚ, *εἶναι σταθερὸν σημεῖον*. Ἐπομένως: ὁ κύκλος (γ), κέντρου Ι καὶ ἐφαπτόμενος τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ καθὼς καὶ τῆς ΔΕ, εἶναι εἷς σταθερὸς κύκλος. Ἢ ἄλλως:

Ἡ περιβάλλουσα τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΔΕ *τῶν δύο τόξων συναρμογῆς εἶναι περιφέρεια (γ), ἐφαπτομένη τῶν* ΓΑ *καὶ* ΓΒ.

Σχ. 376.

Ἀφ' ἑτέρου, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα IAA_1, IBB_1, IMM_1, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως· ἑπομένως

$$IA = IB = IM,$$

ἤ:

Ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ *εἶναι περιφέρεια κέντρου* Ι, *διερχομένη διὰ τῶν σημείων* Α *καὶ* Β.

Ἡ ἀπόστασις, τέλος, ΙΙ' τῆς διακέντρου αβ ἀπὸ τοῦ σημείου Ι εἶναι ἴση πρὸς $MM_1 = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$. Ὥστε:

Ἡ περιβάλλουσα τῆς διακέντρου αβ εἶναι περιφέρεια (ε), κέντρου Ι *καὶ ἀκτῖνος* $\frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$.

Ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων Α καὶ Β δυνάμεθα νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν περιφέρειαν (ε) μίαν δευτέραν ἐφαπτομένην· ἔστωσαν U καὶ V τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ΑΣ καὶ ΒΣ μετὰ τῆς περιφερείας αὐτῆς, U', V', τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δευτέρων ἐφαπτομένων ἐκ τῶν Α καὶ Β.

Ἐὰν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας (ε) καὶ τῆς διακέντρου αβ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν τόξων UU' ἢ VV', τὰ τόξα ΑΜ, ΒΜ ἐφάπτονται *ἐσωτερικῶς*· εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸ σημεῖον Μ εἶναι *ἐσωτερικὸν* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ *ἐξωτερικὸν* εἰς τὴν δευτέραν.

Ἐὰν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς αβ εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς τῶν τόξων UV' ἢ VU', στὰ τόξα ΑΜ, ΒΜ ἐφάπτονται *ἐξωτερικῶς*.

Ἑπομένως:

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς αβ καὶ τῆς περιφερείας (ε) εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τόξου VV'.

Τὸ τμῆμα αβ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν περιφέρειαν (ε), τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΣΑ καὶ ΣΒ, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν τόξων συναρμογῆς· τὸ τμῆμα

τοῦτο γίνεται ἐλάχιστον ὅταν ἡ εὐθεῖα αβ σχηματίζῃ μετὰ τῶν ΣΑ καὶ ΣΒ τρίγωνον ἰσοσκελές, δηλ. ὅταν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΓΙ. Ἐκ τούτων:

Ἡ συναρμογὴ ἐπιτυγχάνεται διὰ δύο κυκλικῶν τόξων μὲ τὴν ἐλαχίστην διαφορὰν ἀντιστοίχων ἀκτίνων, φέροντες ἐφαπτομένην πρὸς τὴν περιφέρειαν, (ε), παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΓΒ *καὶ τοιαύτην, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων πρὸς τὴν περιφέρειαν (ε), ἐξ ἐκείνου τῶν δύο σημείων* Α *καὶ* Β, *τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πλησιέστερον τοῦ σημείου* Γ.

963 α. ***Σημείωσις.*** Ἡ ἀνωτέρω γεωμετρικὴ σπουδὴ τοῦ προβλήματος 960 ὀφείλεται εἰς τὸν Μ. D'Ocagne, ὅστις τὴν ἐδημοσίευσεν εἰς *Nouv. Annal. de Mathém*, τὸ 1898.

Κατασκευὴ ἰσοσκελῶν ἢ ὀρθογωνίων τριγώνων

964. Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὰ τρία στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων ἕν, τοὐλάχιστον, πρέπει νὰ εἶναι γραμμικόν.

Τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον δύναται νὰ εἶναι πλευρά, διάμεσος, ὕψος κλπ., τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο τῶν γραμμῶν αὐτῶν, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου κλπ.

Τὰ προβλήματα τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνων εἶναι τόσον πολυάριθμα καὶ διαφόρων μορφῶν, ὥστε παρίσταται ἀνάγκη χρησιμοποιήσεως τοῦ πλείστου μέρους τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων, ἅτινα μέχρι τοῦδε ἐμελετήσαμεν.

Διὰ τοῦτο, καθίσταται ἀδύνατον νὰ ἀκολουθήσωμεν μίαν γενικὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

Πρόβλημα 253

965. Νὰ *κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον* γνωστοῦ ὄντος:

1) *Τοῦ ὕψους.*
2) *Τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.*
3) *Τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.*

Πρόβλημα 254

966. Νὰ *κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον* γνωστῶν ὄντων:

1) *Τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους.*
2) *Τῆς βάσεως καὶ μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν.*
3) *Τῆς βάσεως καὶ τῆς γωνίας εἰς τὴν κορυφήν.*

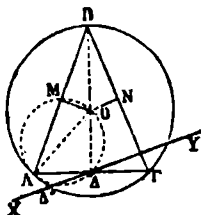
Πρόβλημα 254—Ι

967. Νὰ *κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον* γνωστῶν ὄντων:

1) *Τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.*
2) *Τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.*
3) *Τοῦ ὕψους καὶ μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν.*

Πρόβλημα 255

968. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῆς θέσεως τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἢ μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν.



Σχ. 577.

1) Φέρομεν κάθετον ΑΔΓ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Δ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ.

2) Ἔστω Μ τὸ δοθὲν μέσον μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν. Ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὴν ΜΟ εἶναι ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρον ΒΟΔ εἶναι ἡ ἄλλη.

Πρόβλημα 255—I

969. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τῆς κορυφῆς Α καὶ γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ μέσον τῆς βάσεως εὑρίσκεται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΧΥ.

Ἐπὶ τῆς ΑΟ (Σχ. 577) ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν—τόπον τῶν μέσων τῶν χορδῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου Α.—Ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ΧΥ ὁρίζει τὸ σημεῖον Δ κλπ.

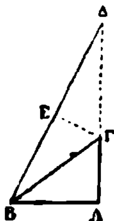
Τὸ σημεῖον Δ' δίδει μίαν δευτέραν λύσιν.

Πρόβλημα 256

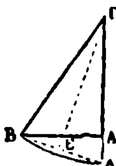
970. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

1) Δίδεται τὸ ἄθροισμα λ.

Ὑποθέσωμεν τὸ τρίγωνον κατεσκευασμένον, ΑΒ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν καὶ ΒΓ + ΓΑ = λ.



Σχ. 578.



Σχ. 579.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα (Σχ. 578), φέρομεν τὴν ΒΓ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΓΔ τῆς ΑΓ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὡρισμένον, ἐφ' ὅσον ΑΔ=λ, καὶ ἀρκεῖ, ἑπομένως, μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ΕΓ εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ὑποτεινούσης του. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

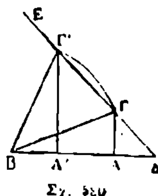
2) Ἔστω δ ἡ δοθεῖσα διαφορὰ (Σχ. 579)· συλλογιζόμενοι ἀναλόγως, λαμβάνομεν μῆκος ΑΔ = δ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΔ. Θὰ ἔχωμεν

$$ΒΓ - ΑΓ = ΑΔ = δ.$$

Πρόβλημα 256—I

971. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὴν *εὕρεσιν σημείου ἐπὶ δοθείσης ἡμιπεριφερείας τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος λ* (§ 921).



Σχ. 580

Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθον τρόπον:

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒ + ΑΓ = λ. Μεταφέροντες τὸ μῆκος ΑΓ ἐπὶ τῆς ΑΔ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον, τὸ μῆκος ΒΔ = λ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ κατασκευάσιμος, ἀφοῦ $\widehat{\Delta} = 45^\circ$. Ἀρκεῖ, λοιπόν, νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὰς τομάς της Γ, Γ' μετὰ τῆς περιφερείας (Β, ΒΓ).

Ὁμοία κατασκευὴ καὶ ἐὰν δοθῇ ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος· ἀλλὰ τότε ἡ γωνία $\Delta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Πρόβλημα 257

972. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον:

1) *Ἐκ τῶν ἀκτίνων ρ καὶ R τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

Ἡ ὑποτείνουσα = 2R καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσον πρὸς 2R + 2ρ (§ 741)· ἀναγόμεθα ἑπομένως εἰς τὴν § 971.

2) *Ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ.*

Πρόβλημα 257—I

973. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον:

1) *Ἐκ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ.*

2) *Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοῦ μήκους ρ.*

Πρόβλημα 257—II

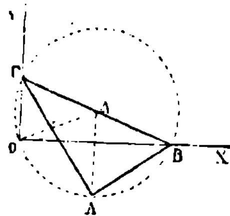
974. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον:

1) *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους.*

2) *Ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

3) *Ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Πρόβλημα 258



Σχ. 581.

975. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς κορυφῆς Α, τοῦ μήκους α τῆς ὑποτεινούσης καὶ γνωστοῦ ὄντος, ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εὑρίσκονται ἐπὶ δύο δοθεισῶν ὀρθογωνίων εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον.

Τὸ τετράπλευρον ΓΟΑΒ εἶναι ἐγγράψιμον, ἀφοῦ αἱ γωνίαι ΓΟΒ, ΓΑΒ εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἡ διάμε-

σος ΟΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΟΒ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ $\frac{\alpha}{2}$ τῆς ὑποτεινούσης α.

Τὸ σημεῖον ἄρα Δ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν $\left(O, \frac{\alpha}{2}\right)$ καὶ $\left(A, \frac{\alpha}{2}\right)$ καὶ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$ τέμνει τὰς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Κατασκευαὶ τριγώνων οἱωνδήποτε

Πρόβλημα 259

976. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν.

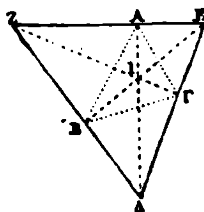
Εἶναι τὸ τρίγωνον τῶν παραλλήλων ἐξ ἑκάστου μέσου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων μέσων.

Πρόβλημα 259—I

977. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν α, β καὶ τῆς προβολῆς τῆς τρίτης ἐπὶ μίαν τῶν δοθεισῶν.

Πρόβλημα 259—II

978. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν κέντρων Δ, Ε, Ζ, τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς αὐτὸ περιφερειῶν.



Σχ. 383.

Ὡς γνωστόν, τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τρίγωνον εἶναι αἱ κορυφαὶ τριγώνου ἔχοντος τὰ ὕψη ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου (§ 662). Φέρομεν λοιπὸν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ οἱ πόδες Α, Β, Γ αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Πρόβλημα 259—III

978 α. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον:

1) *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α, τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.*

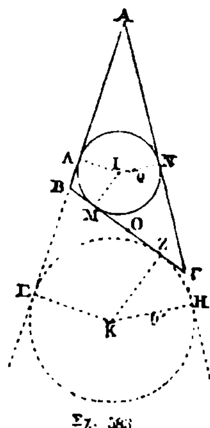
2) *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἢ τῆς παρεγγεγραμμένης καὶ ἐφαπτομένης τῆς δοθείσης πλευρᾶς.*

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς παρατηρήσεις τῆς § 743, ἀγόμεθα εἰς τὰς ἀκολούθους κατασκευάς:

1) Γράφομεν τὸν κύκλον (Ι) μὲ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν ρ, ἐπὶ

μιᾶς ἐφαπτομένης αὐτοῦ λαμβάνομεν τμῆμα $MZ = \beta - \gamma$ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος τούτου τμήματα

$$OB = O\Gamma = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχ. 583.

Αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΛΑ, ΓΝΑ τερματίζουν τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

2) Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Α, ἐγγράφομεν εἰς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν (Ι, ρ) καὶ λαμβάνομεν τμήματα ΛΕ = ΝΗ = α ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α. Οὕτω ὁρίζεται ἡ παρεγγεγραμμένη εἰς τὴν γωνίαν Α περιφέρεια (Κ) καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ΒΓ τῶν περιφερειῶν (Ι) καὶ (Κ) καθορίζει τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

(Βλ. ἐπίσης *Μέθοδοι*, § 262, 3ον).

Πρόβλημα 259—IV

978β· Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀκτίνων ρ, ρ_α καί:

1) *Τῆς πλευρᾶς α.*

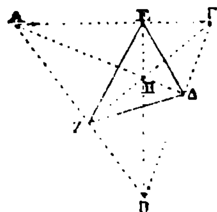
2) *Τῆς διαφορᾶς* $\beta - \gamma = \lambda$.

1) Λαμβάνομεν ΛΕ = α (Σχ. 583) καὶ εἰς τὰ Λ καὶ Ε ὑψοῦμεν καθέτους ΛΙ = ρ, ΕΚ = ρ_α κλπ.

2) Γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ι, ρ), ἐφαπτόμενον πρὸς αὐτὴν τμῆμα $MZ = \beta - \gamma = \lambda$ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς αὐτὸ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ λαμβάνομεν τμῆμα ΖΚ = ρ_α κλπ.

Πρόβλημα 260

979. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ποδῶν Δ, Ε, Ζ τῶν τριῶν ὑψῶν.



Σχ. 584

Ὡς γνωστὸν (§ 662), τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τοῦ ποδικοῦ του ΔΕΖ. Φέρομεν λοιπὸν τὰς διχοτόμους τοῦ δευτέρου τούτου τριγώνου καὶ εἰς τὰς κορυφάς του τὰς καθέτους ἐπ' αὐτάς.

Αἱ τομαὶ των εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Πρόβλημα 261

980. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ:

1) *Ἐκ δύο πλευρῶν* ΑΒ, ΒΓ *καὶ τῆς διαμέσου* ΑΔ *ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν.*

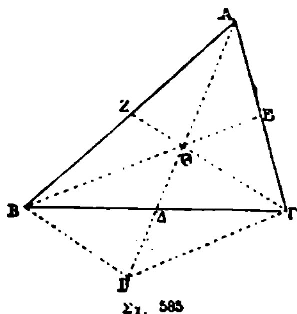
2) *Ἐκ δύο πλευρῶν* ΑΒ, ΑΓ *καὶ τῆς ἐπ' αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου* ΑΔ.

3) *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς* ΒΓ *καὶ τῶν ἐκ τῶν ἄκρων της διαμέσων* ΒΕ *καὶ* ΓΖ.

4) *Ἐκ δύο διαμέσων* ΑΔ, ΒΕ *καὶ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ *ἢ* ΓΑ.

5) *Ἐκ τῶν τριῶν διαμέσων.*

Αἱ λύσεις τῶν τεσσάρων πρώτων προβλημάτων δὲν παρουσιάζουν δυσκολίας· διὰ τὸ πέμπτον, κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΘΓΗ, ἔχον ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἐκ τῶν Β καὶ Γ διαμέσων καὶ διαγώνιον τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἐκ τοῦ Α διαμέσου. Τούτου ἡ δευτέρα διαγώνιος ΒΓ εἶναι ἡ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι κορυφὴ Α ὁρίζεται διὰ τοῦ τμήματος



Σχ. 583

ΘΑ = 2 ΘΔ.

Πρόβλημα 261—I

981. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως ΑΒ, τῆς διαφορᾶς φ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τῆς διαφορᾶς λ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ (σχ. 587) εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}=\frac{\varphi}{2}$ καὶ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν ΑΓ — ΓΒ = λ, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ πλευρά του ΑΒ· Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΔ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΔ εἰς τὴν τρίτην κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.—Διὰ τὴν δυνατότητα τῆς κατασκευῆς του θὰ πρέπει ΑΒ > δ > ΑΒ ημ $\frac{\varphi}{2}$ ·

Πρόβλημα 262

982. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ.

1) *Ἐκ δύο πλευρῶν* ΑΒ, ΒΓ *καὶ τοῦ ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν ὕψους* ΑΔ.

2) *Ἐκ δύο πλευρῶν* ΑΒ, ΑΓ *καὶ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ὕψους* ΑΔ.

Πρόβλημα 262—I

983. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγων ΑΒΓ.

1) *Ἐκ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ *καὶ τῶν ἐκ τῶν ἄκρων της ὑψῶν* ΒΕ, ΓΖ.

2) *Ἐκ δύο ὑψῶν* ΑΔ, ΒΕ *καὶ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ.

Πρόβλημα 263

984. Νὰ κατασκευσθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τοῦ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν ὕψους.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 105).

Πρόβλημα 263—Ι

985. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ:

1) *Ἐκ τῆς γωνίας* Β, *τῆς πλευρᾶς* ΒΓ *καὶ τοῦ ὕψους* ΒΕ.
2) *Ἐκ τῆς γωνίας* Β *καὶ τῶν ὑψῶν* ΑΔ, ΓΖ.
3) *Ἐκ τῆς γωνίας* Β, *καὶ τῶν ὑψῶν* ΒΕ *καὶ* ΑΔ.

Πρόβλημα 263—ΙΙ

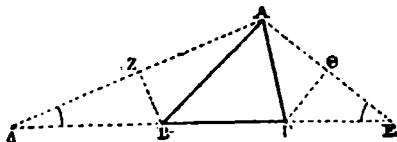
986. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ:

1) *Ἐκ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ, *τῆς γωνίας* Β *καὶ τῆς διαμέσου* ΑΔ.
2) *Ἐκ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ, *τῆς γωνίας* Β *καὶ τῆς διαμέσου* ΓΖ.

Πρόβλημα 264

987. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ τῶν γωνιῶν;

Γράφομεν τμῆμα ΔΕ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν περίμετρον καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὰ ἄκρα του γωνίας Δ καὶ Ε, ἴσας πρὸς τὰ ἡμίση δύο ἐκ τῶν δοθεισῶν γωνιῶν. Οὕτω ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α καὶ αἱ τομαὶ Β, Γ, τῆς πλευρᾶς του ΔΕ μετὰ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΑΕ, εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.



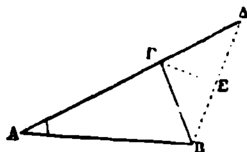
Σχ. 566.

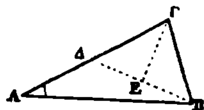
Πρόβλημα 265

988. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, μιᾶς τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, ΑΒ = γ ἡ δοθεῖσα πλευρά, Α ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ λ ἡ διαφορὰ ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΓΑ καὶ ΓΒ.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας ἴσης πρὸς τὴν Α λαμβάνομεν μήκη ΑΒ = γ καὶ ΑΔ = λ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΔ. Ἡ τομὴ τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῆς εὐθείας ΑΔ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.





Σχ. 567.

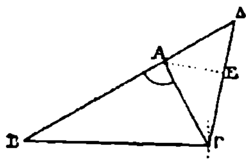
Πρόβλημα 266

989. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς πλευρᾶς ΒΓ = α, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας Α καὶ α) τοῦ ἀθροίσματος ἢ β) τῆς διαφορᾶς λ τῶν ἄλλων πλευρῶν.

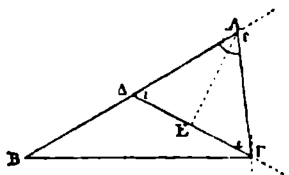
Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

1) Προεκτείνοντες τὴν ΒΑ (Σχ. 588) καὶ λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΔ = ΑΓ, σχηματίζομεν τρίγωνον ΔΑΓ ἰσοσκελὲς καὶ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Δ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν γωνίαν $Δ = \frac{\widehat{A}}{2}$ καὶ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν τμῆμα ΔΒ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ἄθροισμα ΑΒ + ΑΓ = λ. Ἡ τομὴ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς μετὰ τῆς περιφερείας (Β, ΒΓ = α) δίδει τὴν κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου



Σχ. 588



Σχ. 589

καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α εἶναι τομὴ τῆς εὐθείας ΒΔ μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΓΔ.

2) Λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα ΑΔ = ΑΓ (Σχ. 589) σχηματίζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία i εἶναι ἴση πρὸς τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἡμίσεος τῆς γωνίας Α.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν καὶ πάλιν γωνίαν Δ ἴσην πρὸς τὴν i καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν τμῆμα ΔΒ ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν ΑΒ = ΑΓ = λ. Ἡ τομὴ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς μετὰ τῆς περιφερείας (Β, ΒΓ = α) δίδει τὴν κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Ἡ κορυφή του Α εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΒΔ καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΔΓ.

Παρατήρησις. Γράφοντες ἐπὶ τῆς δοθείσης πλευρᾶς ΒΓ τόξον ΒΑΓ, μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Α, ὁδηγούμεθα καὶ εἰς τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν τοῦ προβλήματος :

Νὰ διαιρεθῇ κυκλικὸν τόξον ΒΑΓ *εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοίχων χορδῶν νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος λ.*

Ἡ εἰς τὴν § 921 ἀπ' εὐθείας λύσις τοῦ προβλήματος τούτου δίδει ἕνα δεύτερον τρόπον κατασκευῆς τριγώνου μὲ τὰ ὡς ἄνω δεδομένα.

(Βλ. ἐπίσης *Μέθοδοι*, § 115).

Πρόβλημα 267

990. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν προσκειμένων γωνιῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, ΑΒ = γ ἡ δοθεῖσα πλευρά,

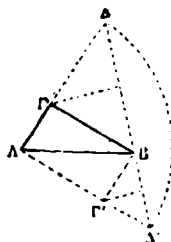
$$ΓΑ + ΓΒ = λ \quad \text{καὶ} \quad Α - Β = φ.$$

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ κατὰ τμῆμα ΓΔ = ΓΒ. Θὰ ἔχωμεν ΑΔ = λ καὶ

$$\text{γωνία } ΑΒΔ = Β + ΓΒΔ = Β + 90° - \frac{ΔΓΒ}{2} =$$

$$= Β + 90° - \frac{Α + Β}{2} = 90° - \frac{Α - Β}{2} = 90° - \frac{φ}{2}.$$

Εἶναι λοιπὸν γνωστὴ ἡ γωνία αὐτὴ καὶ δυνάμεθα νὰ τὴν κατασκευάσωμεν. Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν τμῆμα ΒΑ = α καὶ τέμνομεν τὴν ἑτέραν διὰ τῆς περιφερείας (Α, ΑΔ = λ). Ἂν Δ εἶναι ἓν τῶν σημείων τομῆς, ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΔ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΔ κατὰ τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.



Σχ. 590

Παρατήρησις. Διὰ τὴν δυνατότητα τῆς κατασκευῆς, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$ΑΔ = λ > ΑΒ = α.$$

Τὸ σημεῖον Δ' ἀντιστοιχεῖ εἰς δεύτερον τρίγωνον ΑΒΓ' ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον.

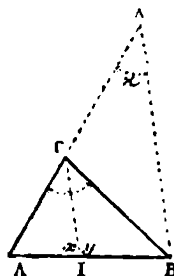
Ἄλλη κατασκευή. Εἷς τόπος τοῦ σημείου Δ εἶναι γνωστός, ἀφοῦ ΑΔ = λ.

Ἔστωσαν x, y αἱ παρὰ τὸν πόδα Ι τῆς διχοτόμου ΓΙ γωνίαι. Ἐπειδὴ

$$x + y = 180°, \quad y - x = φ,$$

ἕπεται $$x = ΑΒΔ = 90° - \frac{φ}{2}$$

καὶ οὕτω ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα ΒΔ ὡς δεύτερος τόπος τοῦ σημείου Δ. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόπων ὁρίζει τὸ σημεῖον Δ κλπ.



Σχ. 591.

Πρόβλημα 267—Ι

991. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τοῦ ἀθροίσματος τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν.

Ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν ἤδη πρόβλημα: *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν* (§ 989, 2).

Πρόβλημα 268

992. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται αὕτη, τῆς ἀπέναντι τῆς δοθείσης πλευρᾶς γωνίας καὶ δύο σημείων κειμένων ἐφ' ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 108).

Πρόβλημα 269

993. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου, μιᾶς γωνίας καὶ τοῦ ὕψους ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης γωνίας.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 134).

Πρόβλημα 270

994. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ΑΒ, τῆς διαφορᾶς φ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ μιᾶς εὐθείας ΧΥ ἐφ' ἧς εὑρίσκεται ἡ κορυφὴ Γ.

Σχ. 592.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ Ζ τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Β πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΥ.

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΓΑ τμῆμα ΓΔ = ΓΒ. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΔΒ ἔχομεν ἀμέσως

$$\widehat{\Gamma B\Delta} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$$

καὶ ἑπομένως

$$\widehat{ABE} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma B\Delta} = \frac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2} = \frac{\varphi}{2}.$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΔΕ καὶ νὰ γνωρίσωμεν τὴν γωνίαν ΒΕΖ.

Ἀφ' ἑτέρου τὸ τετράπλευρον ΕΔΓΖ εἶναι ἐγγράψιμον, ἐπειδὴ

γων. ΕΖΓ = ΕΒΓ = ΓΔΒ = ΕΔΑ

εἶναι, ἄρα, ἡ γωνία ΑΓΖ παραπληρωματικὴ τῆς κατασκευασθείσης ΒΕΖ καὶ κατ' ἀκολουθίαν γνωστὴ = φ'. Ἑπομένως:

Τέμνομεν τὴν εὐθεῖαν ΧΥ διὰ τοῦ κυκλικοῦ τόξου (Α, Ζ, φ'). Ἕκαστον τῶν σημείων τομῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τρίτη κορυφὴ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔργον: *Questions proposées de Géométrie.* ὑπὸ Compagnon, σ. 34, n° 158.

Πρόβλημα 270—Ι

995. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου, τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἀγομένων καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

Σχ. 593.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΓΔ, ΓΗ, ΟΕ εἶναι γνωστά, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΓΗ καὶ νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΓΔ σημεῖον Ο, εἰς ἀπόστασιν ΟΕ = ρ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Αἱ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἐφαπτόμεναι πρὸς τὸν κύκλον (Ο), τερματίζουν τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Πρόβλημα 270—II

996. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας Γ καὶ τῶν ἐκ τῆς κορυφῆς της ὕψους καὶ διχοτόμου.

Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν (Σχ. 593) καὶ τὴν διχοτόμον της καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον. Ἀκολούθως, γράφομεν περιφέρειαν ἐπὶ τῆς ΓΔ ὡς διαμέτρου καὶ τέμνομεν αὐτὴν εἰς Η διὰ τῆς περιφερείας κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος ΑΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΗ κλπ.

Πρόβλημα 271

997. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

(Βλ. *Μέθοδοι*, §§ 262, 3 καὶ 972 α, 2).

Πρόβλημα 271—I

998. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς διαμέσου ΑΜ, τῆς συμμετροδιαμέσου ΑΣ καὶ τῆς ἀποστάσεως ΜΣ τῶν ποδῶν των.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ παρατηροῦντες ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΙ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΒΚΓ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας καὶ ὅτι εἶναι διχοτόμος ἐπίσης τῆς γωνίας ΜΑΣ (§ 899), ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν :

Σχ. 594

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΜΣ, φέρομεν τὴν διχοτόμον του ΑΙ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν μέχρι τῆς συναντήσεώς της Κ μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΜΣ. Ἀκολούθως, ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΜΚ σημεῖον Ο ἴσον ἀπέχον τῶν Α καὶ Κ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΑ). Αἱ τομαὶ αὐτῆς καὶ τῆς ΜΣ εἶναι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Β καὶ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Πρόβλημα 271—II

999. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν διαμέσου, συμμετροδιαμέσου καὶ ὕψους, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

Ἡ κατασκευὴ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΗΜ, ΑΗΣ (Σχ. 594), μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Πρόβλημα 271—III

1000. Δίδεται γωνία Α. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν πλευρῶν της ΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2τ καὶ

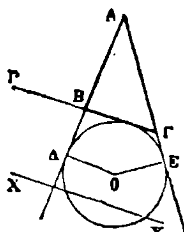
1) *ἡ πλευρὰ* ΒΓ *νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου* Ρ.

Γνωρίζομεν, ὅτι ἐὰν μία περιφέρεια ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν

γωνίας Α, πᾶσα ἐφαπτομένη αὐτῆς, ὡς ἡ ΒΓ, ὁρίζει τρίγωνον ΑΒΓ σταθερᾶς περιμέτρου 2 ΑΔ (§ 739).

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν

$$ΑΔ = ΑΕ = τ,$$



Σχ. 505.

νὰ κατασκευάσωμεν τὰς καθέτους ΔΟ, ΕΟ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Ρ τὴν ἐφαπτομένην ΡΒΓ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ο).

2) *Δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.*

Ἐγγράφομεν εἰς τὴν γωνίαν Α δευτέραν περιφέρειαν (Ι) ἔχουσαν ἀκτῖνα ρ καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΓ τῶν δύο περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ι).

3) *Δοθὲν ἐκ τοῦ* Α *ὕψος.* (Βλ. § 134).

Γράφομεν τὴν περιφέρειαν κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος καὶ φέρομεν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΓ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς (Ο).

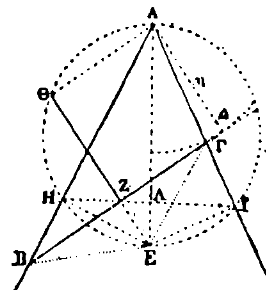
4) *Δοθεῖσαν διχοτόμον τῆς γωνίας* Α.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ τῆς § 998, ὡς ἐπίσης καὶ ἂν ἐδίδετο τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Β ὕψος. Ἂν ἐδίδετο ἡ γωνία Β, θὰ ἀναφερώμεθα εἰς τὴν § 999.

Πρόβλημα 271—IV

1001. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας Α, τοῦ ὕψους ΑΔ = υ καὶ τοῦ ἀθροίσματος λ τῶν πλευρῶν β καὶ γ.**

Ὑποθέτοντες τὸ τρίγωνον κατεσκευασμένον, εὐκόλως ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:



Σχ. 598

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α τμήματα $ΑΗ = ΑΙ = \frac{λ}{2}$, φέρομεν τὰς καθέτους ΗΕ, ΙΕ ἐπ' αὐτὰ καὶ γράφομεν περιφέρειαν ἐπὶ τῆς ΑΕ ὡς διαμέτρου. Τὸ πρόβλημα, οὕτω, ἀνάγεται εἰς τὸ καλούμενον *πρόβλημα τοῦ Francœur* (§ 320) καὶ συνιστάμενον εἰς τὴν ἀγωγὴν εὐθείας ΕΖΘ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τμῆμα ΖΘ νὰ ἔχῃ μῆκος υ. Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α κατὰ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Πράγματι, τὰ τετράπλευρα ΒΕΖΗ καὶ ΓΙΕΖ εἶναι ἐγγράψιμα, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΗΕ καὶ ΕΙΓ ἴσα καὶ ἑπομένως

$$ΑΒ + ΑΓ = ΑΗ + ΑΙ = λ.$$

Παρατήρησις. Τὸ βοηθητικὸν πρόβλημα (§ 320) ἀνήκει εἰς τὸ ΙΙΙ Βιβλίον.

1002. Σημείωσις. 1) Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐπιδέχεται πολλὰς λύσεις (*Mathesis*, 1905, σ. 79, n° 1471). Εἰς τὰ *Questions de Géométrie* τοῦ Desboves, εὑρίσκονται λύσεις καὶ μὲ τὰ δεδομένα

$\beta \pm \gamma,\quad \beta\gamma,\ \frac{\beta}{\gamma}$.

2) Τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ὅμοιον τοῦ ἰσοσκελοῦς ΗΕΙ (§ 677).

3) Αἱ εὐθεῖαι, ὡς ἡ ΒΓ, αἱ ὁρίζουσαι ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΑΙ τμήματα ΗΒ = ΙΓ, περιβάλλουν παραβολήν, ἔχουσαν τὸ σημεῖον Ε ὡς ἑστίαν καὶ ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ι (G., n° 1015).

Πρόβλημα 272

1003. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας καὶ ἡ τρίτη νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

Ἔστωσαν Α, ΥΧ, ΥΖ τὸ σημεῖον καὶ αἱ εὐθεῖαι, ΔΒΓ δὲ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπειδὴ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία Δ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΧΥΖ, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς χορδὴ ΒΓ ἔχει ὡρισμένον μῆκος καὶ ἐφάπτεται ἑπομένως καταλλήλου περιφερείας, ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης.

Σχ. 597.

Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν ἐφαπτομένην ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ταύτην καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, γράψωμεν τὰς παραλλήλους ΓΔ, ΒΔ πρὸς τὰς εὐθείας ΥΧ καὶ ΥΖ, ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται ἀναγκαίως ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας, ἀφοῦ $\widehat{\Delta} = X\widehat{Y}Z$, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 272—Ι

1004. Δίδονται δύο σημεῖα Α, Β καὶ περιφέρεια. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς γραμμῆς αὐτῆς σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας χορδὴν ΔΕ δοθέντος μήκους λ.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΔΕ = λ. Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΔΕ εἶναι ὡρισμένον, θὰ εἶναι ὡρισμένον καὶ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας Γ, ἴσης πρὸς τὴν γωνίαν χορδῆς ΜΝ = λ καὶ ἐφαπτομένης ΜΤ.

Τὸ σημεῖον Γ, ἑπομένως, εἶναι τομὴ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τοῦ τόξου (Α, Β, $\widehat{\Gamma}$).

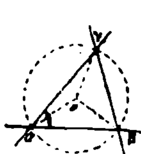
Σχ. 598.

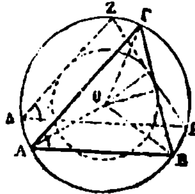
Παρατήρησις. Ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἢ καμμία.

Πρόβλημα 273

1005. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) τρίγωνον ἔχον τὰς πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

1) Ἔστω αβγ τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) γωνίαν Δ, ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν α τοῦ τριγώνου τούτου, καὶ βαίνουσαν ἐπὶ χορδῆς ΕΖ. Τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.





Σχ. 599

Εἶναι, λοιπόν, ἡ ΒΓ ἐφαπτομένη παράλληλος τῆς βγ περιφερείας, ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης καὶ ἐφαπτομένης τῆς ΕΖ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ ἄκρου Β αὐτῆς φέρωμεν χορδὴν ΒΑ παράλληλον πρὸς τὴν βα, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ

$$\widehat{A} = \widehat{\alpha}, \ AB // \alpha\beta$$

καὶ ἐπομένως αγ//ΑΓ.

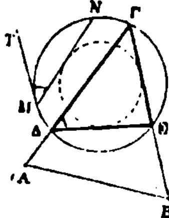
2) Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα, νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον αβγ καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς δοθείσης νὰ φέρωμεν ἀκτῖνας παραλλήλους πρὸς τὰς οα, οβ, ογ.

3) Ἐπίσης, νὰ ὁρίσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς, ὡς ἐν § 1003.

Πρόβλημα 273—Ι

1006. Δίδονται δύο σημεῖα Α, Β καὶ περιφέρεια. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ ἐπ' αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ὁρίζουν ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν τρίγωνον ΓΔΕ ἔχον μίαν γωνίαν δοθέντος μεγέθους.

Ἔστω $\widehat{\Delta}$ ἡ ὡρισμένη γωνία. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΓΕ θὰ ἔχῃ ὡρισμένον μῆκος, θὰ ἐφάπτεται καταλλήλου περιφερείας, ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης. Ἀρκεῖ, λοιπόν, ἐκ τοῦ σημείου Β νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΒΕΓ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ νὰ συνδέσωμεν τὸ Ε μετὰ τοῦ σημείου Δ, καθ' ὃ ἡ ΑΓ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



Σχ. 600.

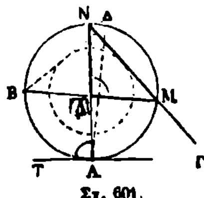
Παρατηρήσεις. 1) Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Β δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας πρὸς τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν, ὑπάρχουν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, καὶ δύο ἄλλαι, φυσικά, ἐὰν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν τοποθετήσωμεν εἰς τὸ Ε.

2) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι εἰς τὸ Γ, ἐργαζόμεθα ὡς ἐν § 1004. Ὥστε, ἐν ὅλῳ, ἔχομεν ἓξ λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 274

1007. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΛΜΝ τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραί του νὰ διέρχωνται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ, αἱ κορυφαὶ Μ, Ν νὰ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας, διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, καὶ ἡ γωνία Λ νὰ ἔχῃ δοθὲν μέγεθος.**

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Λ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΜΝ, τὸ δεύτερον τοῦτο τόξον ἢ καὶ ἡ χορδή του δύναται νὰ γνωσθῇ. Πρὸς τοῦτο, δι' ἐφαπτομένης ΑΤ καὶ χορδῆς ΑΔ σχηματίζομεν γωνίαν ΤΑΔ = Λ· ἡ χορδὴ ΒΔ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τὸ τόξον ΜΝ.



Σχ. 601.

Γράφομεν, ἀκολούθως, περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἐφαπτομένην ΓΜΝ πρὸς αὐτήν. Ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΝ καὶ ΒΜ ὁρίζουν τὴν τρίτην κορυφὴν Λ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ Γ ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι· εἰς τὴν μίαν τούτων ἀντιστοιχεῖ γωνία Λ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην παραπληρωματικὴ αὐτῆς.

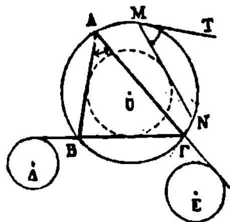
Πρόβλημα 274—I

1008. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι ὡρισμένη, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ ἐφάπτονται δύο ἄλλων δοθεισῶν περιφερειῶν.**

Ἔστωσαν Ο, Δ, Ε, τὰ κέντρα τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ὡρισμένη, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τόξον καὶ τὴν χορδὴν ΒΓ, ἴσα, ἀντιστοίχως, πρὸς τὸ τόξον καὶ χορδὴν ΜΝ τῆς γωνίας ΤΜΝ τοῦ σχήματος. Ὥστε:

Ἡ χορδὴ ΒΓ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Δ) καὶ τῆς ὁμοκέντρου (Ο') τῆς (Ο) καὶ ἐφαπτομένης τῆς ΜΝ, ἡ δὲ ΓΑ ὁρίζεται διὰ τῆς ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐφαπτομένης ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ε).



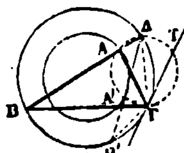
Σχ. 602.

Παρατήρησις. Εἰς μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην ΒΓ ἀντιστοιχοῦν δύο λύσεις· εἰς τὰς τέσσαρας, ἐν γένει, ἑπομένως, κοινὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν (Δ) καὶ (Ο') ἀντιστοιχοῦν ὀκτὼ λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 275

1009. **Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἔχον δοθείσας τὰς γωνίας καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς περιφερείας, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς ἄλλης.**

Ὑποθέσωμεν λελυμένον τὸ πρόβλημα, ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ Δ τὴν τομὴν τῆς εὐθείας ΒΑ μετὰ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας.



Σχ. 603

Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι ὡρισμένη, ὡς σχηματίζουσα μετὰ ἐφαπτομένης ΓΤ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Β τοῦ τριγώνου, ἡ κορυφὴ Α αὐτοῦ εὑρίσκεται, ὡς τομὴ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας καὶ τοῦ κυκλικοῦ τόξου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Γ, Δ καὶ ἔχοντος ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας Α.

Παρατήρησις. Εἰς τὰ δύο, ἐν γένει, κοινὰ σημεῖα Α, Α' τοῦ τόξου (Γ, Δ, 180° — Α) καὶ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας, ἀντιστοιχοῦν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέγεθος τῆς εἰς τὸ Γ γωνίας δύναται νὰ ἐναλλαχθῇ πρὸς τὰ τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν, γίνεται φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἓξ λύσεις τοῦ γενικοῦ προβλήματος.

Ἓξ ἄλλας λύσεις λαμβάνομεν ὑποθέτοντες τὴν μίαν κορυφὴν ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ τὰς ἄλλας ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα εὑρίσκεται εἰς *Cours complet de mathématiques pures* τοῦ Fraucœur, τόμ. I.

Πρόβλημα 276

1010. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἄλλο ἴσον πρὸς δοθέν.

Θεωροῦντες τὸ ἀντίθετον πρόβλημα, ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον:

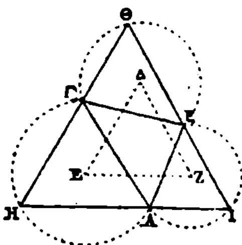
Πρόβλημα 276—I

Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, νὰ ἀχθοῦν τρεῖς εὐθεῖαι σχηματίζουσαι τρίγωνον ἴσον πρὸς δοθέν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 215).

Πρόβλημα 276—II

1011. **Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον ἰσόπλευρον.**



Σχ. 604.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου γράφομεν τόξα ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ἴσων πρὸς 60°, σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τῶν κέντρων των καὶ διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΔΕΖ (§ 879).

Πρόβλημα 276—III

1012. **Εἰς δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον, νὰ περιγραφῇ τετράγωνον ἔχον μίαν κορυφὴν κοινὴν μετὰ τοῦ τριγώνου.**

Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, κλπ.

Πρόβλημα 276—IV

1013. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τετράγωνον ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἔχον μίαν κορυφὴν κοινὴν μετὰ τοῦ τετραγώνου.

Εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

Κατασκευαὶ τετραπλεύρων

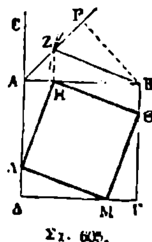
1014. Ἐπειδὴ αἱ κατασκευαὶ παραλληλογράμμων ἀνάγονται εὐκόλως εἰς ἐκείνας τῶν τριγώνων, ἐλάχιστα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ αὐτάς.

Αἱ κατασκευαὶ τῶν τραπεζίων ὁδηγοῦν εἰς ἐνδιαφέροντα προβλήματα, ἰδιαιτέρως ὅταν γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ III Βιβλίου· τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὰ ἐγγράψιμα τετράπλευρα ἢ καὶ εἰς τὰ τυχόντα τετράπλευρα.

Πρόβλημα 277

1015. Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο, ἔχον ὡς πλευρὰν δοθὲν μῆκος λ. Ποῖα τὰ ὅρια τῆς μεταβολῆς τοῦ λ ;

1ος Τρόπος. Γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν ὡς κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$. Τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου — λαμβανόμενα κατ' ἀρτίαν ἢ περιττὴν τάξιν — εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Σχ. 605.

2ος Τρόπος. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΡ τῆς γωνίας ΒΑΕ καὶ τέμνομεν αὐτὴν εἰς Ζ διὰ τῆς περιφερείας (Β, λ). Ἐκ τοῦ Ζ καταβιβάζομεν κάθετον ΖΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐκ τοῦ Η φέρομεν παράλληλον ΗΘ πρὸς τὴν ΖΒ καὶ εἰς τὰ Η καὶ Θ τὰς καθέτους ΗΛ, ΘΜ ἐπὶ τὴν ΗΘ. Τὸ τετράπλευρον ΗΘΜΛ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Πράγματι, ΘΗ=ΒΖ καὶ ΑΗ=ΗΖ=ΒΘ· ἑπομένως, ΒΗ=ΓΘ, κλπ. Τὸ μῆκος ΒΖ = λ δύναται νὰ μεταβάλλεται μεταξὺ ΒΑ καὶ τῆς καθέτου $BP = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

1016. ***Σημείωσις.*** Ὁ 2ος τρόπος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ W. Collins, *Key to exercices on Euclid's Elements of Geometry*, σ. 20.

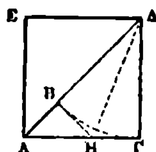
Πρόβλημα 278

1017. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

1) Διὰ τὸ ἄθροισμα Βλ. *Μέθοδοι*, § 41.
2) Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα διαφορά.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ φέροντες κάθετον ΒΗ ἐπὶ τὴν ΑΔ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΗ

εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ $\widehat{BAH} = 45°$, τὸ δὲ τετράπλευρον ΗΓΔΒ συμμετρικὸν πρὸς τὴν ΗΔ. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΔ, ΗΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ΔΒ = ΔΓ. Ἑπομένως



Σχ. 606.

ΗΓ = ΒΗ = ΑΒ.

Θὰ πρέπει, λοιπόν, νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν ΓΑΕ καὶ τὴν διχοτόμον της καὶ νὰ μεταφέρωμεν τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν δ ἀπὸ τῆς θέσεως ΑΒ εἰς τὴν ΒΗ καὶ ἀπ' αὐτῆς εἰς τὴν ΗΓ. Ὑψοῦμεν ἀκολούθως κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΓ, κλπ.

Πρόβλημα 279

1018. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἐντὸς τοῦ κοινοῦ μέρους δύο ἴσων τεμνομένων κύκλων.

Διὰ τοῦ μέσου τῆς διακέντρου φέρομεν δύο χορδὰς τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν κύκλων, κεκλιμένας κατὰ 45° πρὸς τὴν διάκεντρον. Αὗται εἶναι αἱ διαγώνιοι τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρόβλημα 279—1

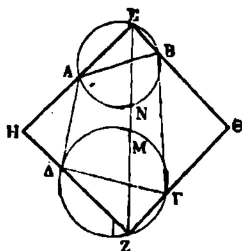
1019. Εἰς τετράγωνον, νὰ ἐγγραφοῦν τέσσαρες κύκλοι ἴσοι, ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων καὶ ἕκαστος δύο πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς των συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Εἶναι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ τέσσαρα ἴσα τετράγωνα, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ τετράγωνον. Ἡ ἀκτίς των εἶναι τὸ τέταρτον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Πρόβλημα 280

1020. Νὰ περιγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθὲν τετράπλευρον.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ ΗΕΘΖ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Αἱ κορυφαὶ Ε καὶ Ζ τοῦ τετραγώνου θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐχουσῶν ὡς διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου, ἡ δὲ διαγώνιος ΕΖ τοῦ τετραγώνου, ὡς διχοτομοῦσα τὰς γωνίας Ε καὶ Ζ αὐτοῦ, θὰ διέρχεται διὰ τῶν μέσων, Ν καὶ Μ, τῶν τόξων ΑΝΒ καὶ ΔΜΓ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.



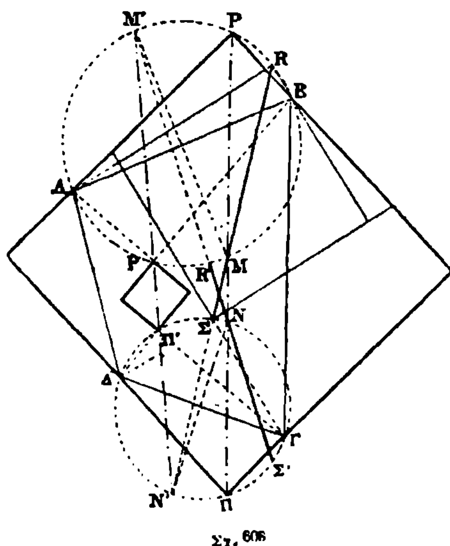
Σχ. 607.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΝ διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ διαγώνιος ΕΖ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, ἄρα καὶ τοῦτο τὸ τετράγωνον.

Παρατηρήσεις. 1) *Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τέσσαρας λύσεις.* Ἔστωσαν, πράγματι, Μ, Μ' τὰ μέσα τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν διαμέτρου ΑΒ καὶ Ν, Ν' τὰ ὅμοια σημεῖα διὰ τὰς ἡμιπεριφερείας ΓΔ.

Συνδέοντες ἕκαστον τῶν σημείων Μ, Μ' πρὸς ἓν τῶν Ν, Ν',

λαμβάνομεν εὐθεῖαν συναντῶσαν ἑκάστην τῶν ἄλλων ἡμιπεριφερειῶν κατὰ σημεῖα δυνάμενα νὰ ληφθοῦν ὡς ἄκρα διαγωνίου ἑνὸς



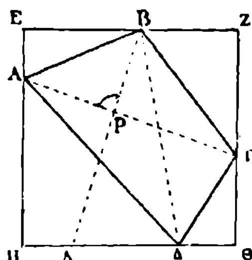
Σχ. 608

ἐκ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. Εὑρίσκομεν, οὕτω, τέσσαρας λύσεις, ἀντιστοίχους τῶν διαγωνίων ΡΠ, Ρ'Π', RΣ, R'Σ'.

2) *Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ *εἶναι ἴσαι καὶ ὀρθογώνιοι, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν εἰς αὐτὸ ἀπειρίαν τετραγώνων.*

Διότι, διὰ τῶν Α καὶ Γ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο παραλλήλους πρὸς τυχοῦσαν διεύθυνσιν καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ τὰς καθέτους ἐπ' αὐτάς. Τὸ τετράπλευρον τῶν τεσσάρων τούτων εὐθειῶν εἶναι τετράγωνον.

3) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἴσων καὶ ὀρθογωνίων διαγωνίων, αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ ἔχουσαι ὡς διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ *σταθεροῦ κέντρου ὁμοιότητος* τῶν τεσσάρων περιγεγραμμένων τετραγώνων (§ 2476).



Σχ. 609.

4) Τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ὑπάρχει καὶ ἡ ἀκόλουθος ἁπλουστάτη λύσις:

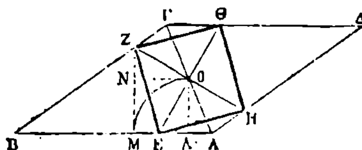
Ἐκ μιᾶς κορυφῆς Β τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου φέρομεν τὴν κάθετον ΒΡ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ, λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΛ = ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΛ. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. (*Mathesis*, 1881, σ. 8, Biandsutter).

Πρόβλημα 281

1022. **Εἰς παραλληλόγραμμον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.**

Ἔστω ΖΕΗΘ τὸ τετράγωνον καὶ τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον συμπίπτει, προφανῶς, πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.

Φέρομεν τὰς καθέτους ΟΛ καὶ ΖΜ ἐπὶ τῆς ΑΒ καθὼς καὶ τὴν κάθετον ΟΝ ἐπὶ τὴν ΖΜ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΛΕ, ΟΝΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς γωνίας καὶ τὰς ὑποτεινούσας πράγματι, ΟΕ = ΟΖ, αἱ δὲ γωνίαι ΛΟΕ καὶ ΝΟΖ ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους, ἀντιστοίχως. Ὥστε



Σχ. 610

ΟΝ = ΟΛ,

καὶ οὕτω ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ παραλληλογράμμου, ἄγομεν κάθετον ΟΛ ἐπὶ τὴν ΑΒ, λαμβάνομεν τμῆμα ΛΜ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ ΟΛ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Μ ὑψοῦμεν κάθετον ΜΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὸ σημεῖον Ζ εἶναι ἡ μία κορυφὴ τοῦ τετραγώνου.

Ἀκολούθως, ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρομεν κάθετον ΟΝ ἐπὶ τὴν ΖΜ καὶ μεταφέρομεν τὸ τμῆμα ΖΝ εἰς τὸ ΛΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἄλλη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου κλπ.

Παρατήρησις. Ἡ διερεύνησις τοῦ προβλήματος εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρουσα ἀλλὰ καὶ πολὺ ἐκτενής· χρησιμοποιεῖ ἄλλωστε καὶ τὴν Τριγωνομετρίαν. (Βλ. *N. An. de Mathématiques,* 1859, σ. 451—459, J. Murent).

Πρόβλημα 281—1

1023. **Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Α.**

Συνδέομεν τὸ κέντρον Ο τοῦ δοθέντος τετραγώνου μετὰ τοῦ σημείου Α, φέρομεν εὐθεῖαν ΟΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν τμῆμα ΟΒ = ΟΑ.

Ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ τέμνει μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἢ τὴν προέκτασιν αὐτῆς εἰς δύο σημεῖα ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ δὲν τὴν συναντᾷ· εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὑπάρχουν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, εἰς τὴν δευτέραν μία—καὶ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐλάχιστον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον—καὶ εἰς τὴν τρίτην καμμία ([54]).

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ ἐπιληφθῶμεν καὶ ἀλγεβρικῶς τοῦ

---

54. Σημ. μετ. Ἔστω, πράγματι, ΓΔΕΖ τὸ τετράγωνον καὶ Μ ἓν τῶν σημείων τομῆς τῆς περιφερείας ΑΒ καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Αἱ ΑΜ, ΒΜ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΓΖ καὶ ΔΕ τοῦ τετραγώνου εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Σ. Ν, Μ, Σ εἶναι τρεῖς κορυφαὶ ἑνὸς ἐκ τῶν ζητουμένων τετραγώνων.
Ἐπειδὴ ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΝΜΣ, τὸ ΜΟΣΔ ἐγγράψιμον τετράπλευρον καὶ τὸ τρίγωνον ΜΟΣ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς κλπ.

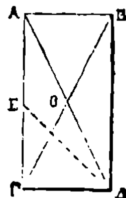
προβλήματος, ὁπότε ἀγόμεθα εἰς ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ· τὰ ἀποτελέσματα εἶναι τὰ ἴδια ἀλλὰ ἡ ἐργασία ἐπίπονος.

Πρόβλημα 282

1024. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον :

1) *Ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων.*

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς γνώσεως τῆς γωνίας Ο γνωρίζεται καὶ ἡ γωνία ΒΑΟ, ἀγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ γωνίαι καὶ ὡρισμένον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας (§ 974, 2).



Σχ. 611.

2) *Ἐκ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων καὶ τῆς διαφορᾶς δύο παρακειμένων πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΕ ἡ διαφορὰ αὐτη. Τὸ τρίγωνον ΑΕΔ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ ΑΕ καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαι· πράγματι,

$$\text{γων } \Delta A E = 90^\circ - \frac{A O \Gamma}{2}, \quad \widehat{A E \Delta} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

3) *Ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ διαγωνίου.*

Ἀναγόμεθα εἰς κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας (§ 989).

Θὰ ἠδύνατο, ἐπίσης, νὰ ἐδίδοντο ἡ διαγώνιος καὶ ἡ διαφορὰ τῶν προσκειμένων πλευρῶν.

Πρόβλημα 282—I

1025. **Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, ἐκ τῆς πλευρᾶς καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.**

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ὁδηγούμεθα εἰς κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Πρόβλημα 283

1026. **Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ἐξ αὐτοῦ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον :**

1) *Νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον* (§§ 99α καὶ 874).
2) *Διαφορὰν παρακειμένων πλευρῶν δοθεῖσαν* (§§ 99 β καὶ 584).
3) *Νὰ εἶναι τετράγωνον* (§ 99 β, 2).
4) *Νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐκ τοῦ* Α *ὕψος τοῦ τριγώνου.*

Πρόβλημα 284

1027. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου :**

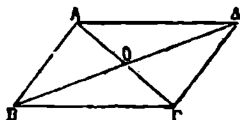
1) *Ἡ περίμετρος νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος* (§ 100 α).
2) *Ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος* (§ 100 β).

Πρόβλημα 284—Ι

1028. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον:

1) *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν διαγωνίων.*
2) *Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ μιᾶς διαγωνίου.*
3) *Ἐκ δύο παρακειμένων πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν.*
4) *Ἐκ τῶν διαγωνίων καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν.*

1) Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΒΟΓ, ἐκ τῆς γνωστῆς πλευρᾶς καὶ τῶν ἡμιδιαγωνίων. Αἱ προεκτάσεις τῶν ΟΒ καὶ ΟΓ κατὰ ἴσα, ἀντιστοίχως, μήκη, παρέχουν τὰς κορυφὰς Α καὶ Δ τοῦ παραλληλογράμμου.



Σχ. 612.

2) Κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν Α, Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΓ, ΒΑ.

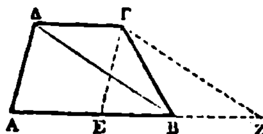
3) Ὁμοίως.

4) Γράφομεν δύο εὐθείας τεμνομένας κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς τὸ Ο καί, ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου αὐτοῦ, λαμβάνομεν ἐφ' ἑκάστης εὐθείας τμήματα ἴσα πρὸς τὰ ἥμιση τῶν μηκῶν τῶν δοθεισῶν διαγωνίων. Τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ παραλληλογράμμου.

Πρόβλημα 285

1029. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν.

Ἔστω λελυμένον τὸ πρόβλημα καὶ ΓΕ παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΑ τοῦ τραπεζίου. Τὸ τρίγωνον ΓΒΕ εἶναι κατασκευάσιμον, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΓΒ καὶ ΓΕ εἶναι γνωσταὶ ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ ἡ ΒΕ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου. Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τμῆμα ΓΔ, παράλληλον πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἴσον πρὸς τὴν μικροτέραν βάσιν τοῦ τραπεζίου.

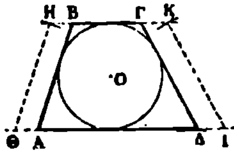


Σχ. 613.

Πρόβλημα 285—Ι

1030. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, ἐκ τῶν βάσεων καὶ διαγωνίων.

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΖ (Σχ. 613) ἔχον ὡς βάσιν τὸ ἄθροισμα ΑΖ τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου καὶ ἄλλας πλευρὰς τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.



Σχ. 614.

Πρόβλημα 286

1031. **Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.**

Γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο), φέρομεν παραλλήλους ἐφαπτομένας αὐτῆς καὶ — κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ

σχήματος δηλουμένην κατασκευὴν — τάς, ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας πλευράς, ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΓΔ.

Πρόβλημα 286—I

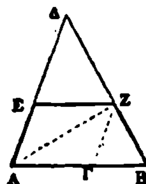
1032. **Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, ἐκ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, μιᾶς βάσεως καὶ μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.**

Μετὰ τὴν ἀγωγὴν τῆς ΑΒ (Σχ. 614), λαμβάνομεν ἐπὶ μιᾶς τῶν παραλλήλων τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν βάσιν καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἐφαπτομένην ΓΔ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Πρόβλημα 286—II

1033. **Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν βάσεων καὶ γωνιῶν.**

Λαμβάνομεν τὰ δοθέντα μήκη ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, κατασκευάζομεν εἰς τὰ Α καὶ Β γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον ΓΖ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΔ τοῦ κατασκευασθέντος τριγώνου ΑΒΔ. Θὰ ἔχωμεν ΕΖ = ΑΓ.



Σχ. 615.

Πρόβλημα 286—III

1034. Ὁμοίως, **ἐκ τῶν γωνιῶν, τῆς βάσεως ΑΒ καὶ μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΕ ἢ μιᾶς τῶν διαγωνίων ΑΖ** (Σχ. 615).

Πρόβλημα 286—IV

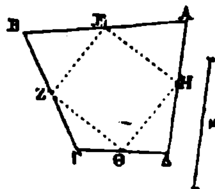
1035. Ὁμοίως, **ἐκ τῆς βάσεως ΑΒ, τῆς γωνίας Β, τῆς διαγωνίου ΑΖ καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΕ** (Σχ. 615).

Πρόβλημα 286—V

1036. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐκ τῶν μέσων τριῶν πλευρῶν καὶ τμήματος παραλλήλου καὶ ἴσου πρὸς τὴν τετάρτην πλευράν.**

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον· τὰ μέσα Ε, Ζ, Θ, Η τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου (§ 542).

Τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ νὰ ὁρισθῇ οὕτω τὸ μέσον Η τῆς τετάρτης πλευρᾶς. Ἀκολούθως, φέρομεν ἐκ τοῦ Η καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τμήματα ΗΑ, ΗΔ ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος τμήματος μ καθὼς καὶ τὰ τμήματα ΑΒ, ΔΓ, ἔχοντα ὡς μέσα τὰ σημεῖα Ε καὶ Θ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενον.



Σχ. 616.

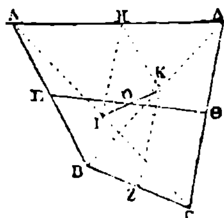
Πρόβλημα 287

1037. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ τῆς εὐθείας ΕΘ, τῆς συνδεούσης τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν.**

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον, Ε, Ζ, Θ, Η, τὰ μέσα τῶν πλευ-

ρῶν, I, K τὰ μέσα τῶν διαγωνίων. Θεωρήσωμεν τὰ τετράπλευρα ΕΙΘΚ, ΗΙΖΚ.

Ἕκαστον τούτων εἶναι παραλληλόγραμμον· πράγματι, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΕΚ, ΙΘ τοῦ πρώτου λ. χ. εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς συνδέουσαι τὰ μέσα Ε, Κ καὶ Ι, Θ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΒΔ καὶ ΓΑ, ΓΔ τῶν τριγώνων ΔΒΑ καὶ ΔΓΑ, ἀντιστοίχως, μὲ κοινὴν βάσιν ΑΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ δεύτερον τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 617

Τὸ παραλληλόγραμμον ΕΙΘΚ εἶναι κατασκευάσιμον, ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰς πλευράς του καὶ τὴν διαγώνιον ΕΘ. Δύναται λοιπὸν νὰ ὁρισθῇ θέσει ἡ ἄλλη διαγώνιός του ΙΚ καὶ νὰ κατασκευασθῇ, ἐπομένως, καὶ τὸ δεύτερον παραλληλόγραμμον ΗΙΖΚ, τοῦ ὁποίου θὰ γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του πάλιν καὶ μίαν διαγώνιον. Οὕτω ὁρίζονται καὶ τὰ τέσσαρα μέσα Ε, Θ, Η, Ζ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἄρα καὶ τὸ τετράπλευρον. Ἐπειδὴ ἐδόθησαν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του καὶ αἱ διευθύνσεις των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν θεωρηθέντων παραλληλογράμμων.

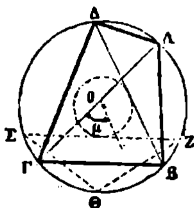
1037 α. Σημείωσις. Βλ. *J. d. M.* τοῦ Vuibert, 1892, σ. 93, n° 2887, ἡ *Théorèmes et Problèmes de Géométrie* τοῦ Catalan, 6η ἔκδοσις, P. VIII, σ. 14.

Ἐπίσης *A. d. G.*, τόμ. II, 1811 - 1812, σ. 32. Λύσεις ὑπὸ Lhuillier, Rochat, Pilate.

Πρόβλημα 287—I

1038. **Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ἐκ τῶν διαγωνίων, τῆς γωνίας αὐτῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

Ἐπειδὴ εἰς ἐγγράψιμον τετράπλευρον αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἡ γνῶσις τῶν διαγωνίων συνεπάγεται τὴν γνῶσιν καὶ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου καί, ἐπομένως, τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς γωνίας, τὰς διαγωνίους καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν.



Σχ. 618.

Γράφομεν περιφέρειαν διὰ τῆς δοθείσης ἀκτῖνος καὶ λαμβάνομεν δύο χορδὰς αὐτῆς ΑΓ, ΕΖ ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας διαγωνίους· ἀκολούθως, γράφομεν περιφέρειαν (γ), ὁμόκεντρον τῆς πρώτης καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΕΖ, καὶ φέρομεν πρὸς αὐτὴν ἐφαπτομένην ΒΔ κεκλιμένην κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν μ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἐπειδὴ ΔΒ = ΕΖ, ὡς χορδαὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 287—II

1039. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐγγράψιμον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν γωνιῶν, μιᾶς διαγωνίου ΑΓ καὶ τῆς γωνίας αὐτῆς μ πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον.**

'Επὶ τῆς δοθείσης διαγωνίου ΑΓ (Σχ. 618), γράφομεν κυκλικὸν τόξον, δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς Δ καὶ συμπληροῦμεν τὴν περιφέρειαν. 'Εγγράφομεν ἀκολούθως εἰς αὐτὴν γωνίαν ΕΘΖ, ἴσην πρὸς μίαν τῶν ἀπέναντι τῆς ἄλλης διαγωνίου γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην πρὸς τὴν, προηγουμένως θεωρηθεῖσαν, περιφέρειαν (γ) καὶ κεκλιμένην κατὰ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν μ πρὸς τὴν ΑΓ.

Πρόβλημα 287—III

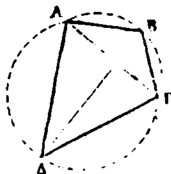
1040. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῆς διαγωνίου ΑΓ, τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας Δ, τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Πρόβλημα 287—IV

1041. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου δίδονται:

1) *Ἡ διαγώνιος* ΑΓ, *ἡ πλευρὰ* ΑΒ *καὶ αἱ γωνίαι*.

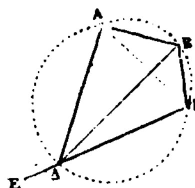
'Επὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ, γράφομεν δύο κυκλικὰ τόξα ΑΒΓ, ΑΔΓ, δεχόμενα γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας Β καὶ Δ καὶ τέμνομεν τὸ πρῶτον εἰς Β διὰ τῆς περιφερείας (Α, ΑΒ). Συμπληροῦμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου, σχηματίζοντες γωνίαν ΒΓΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ.



Σχ. 619.

1042. 2) *Δύο παρακείμεναι γωνίαι* Β *καὶ* Γ, *ἡ πλευρὰ* ΑΒ *καὶ αἱ διαγώνιοι*.

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν γωνίαν Β καὶ δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ σχηματίζομεν κατόπιν γωνίαν ΒΓΕ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ. Ἡ περιφέρεια (Β, ΒΔ) τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΓΔ κατὰ τὴν τετάρτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου.



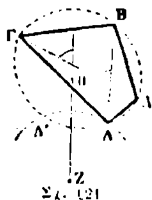
Σχ. 620.

Πρόβλημα 288

1043. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν διαγωνίων, τῆς γωνίας αὐτῶν μ καὶ δύο ἀντικειμένων γωνιῶν Β καὶ Δ.

'Επὶ τῆς ΑΓ γράφομεν δύο κυκλικὰ τόξα δεχόμενα γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας Β καὶ Δ. 'Εκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἑνὸς τῶν τόξων τούτων, λ. χ. τοῦ ΑΒΓ, φέρομεν τμῆμα ΟΖ, ἴσον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ κεκλιμένον πρὸς τὴν ΑΓ κατὰ τὴν γωνίαν μ, καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ζ), ἴσην πρὸς τὴν (Ο).

Ἂν ἐκ τοῦ σημείου Δ, καθ' ὃ ἡ περιφέρεια (Ζ) τέμνει τὸ δεύτερον τόξον ΑΔΓ, φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΖΟ, ἡ τομὴ αὐτῆς μετὰ τοῦ τόξου ΑΒΓ ὁρίζει τὴν τετάρτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου (§ 864).



Σχ. 621

Ἄλλη κατασκευή. Κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμον ΑΓΕΘ,

ἔχον ὡς πλευρὰς τὰ δοθέντα μήκη ΑΓ, ΕΘ = ΒΔ καὶ γωνίαν ΑΓΕ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν μ. Ἐπὶ τῶν ΑΓ· καὶ ΕΘ γράφομεν κυκλικὰ τόξα δεχόμενα γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Β καὶ Δ. Ἕκαστον τῶν κοινῶν σημείων τῶν τόξων τούτων δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κορυφὴ Β ἢ Δ, ὁπότε τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ τμήματος, τοῦ παραλλήλου καὶ ἴσου πρὸς ΘΑ ἢ ΕΓ, θὰ εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ Δ ἢ Β τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου.

Πρόβλημα 288—Ι

1043 α. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται:

1) *Αἱ πλευραὶ καὶ ἡ γωνία δύο ἀπέναντι ἐξ αὐτῶν* (Lemoine, J.M.E., 1884, σ. 103).

2) *Δύο ἀπέναντι πλευραί, αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.*

1) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον καὶ ω ἡ γωνία τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διὰ τῶν Β καὶ Δ φέρομεν παραλλήλους ΒΕ, ΔΕ πρὸς τὰς πλευρὰς ΓΔ καὶ ΓΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατασκευάζεται, ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν ω, αἱ δὲ πλευραὶ ΒΕ καὶ ΒΑ ἴσαι πρὸς δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου.

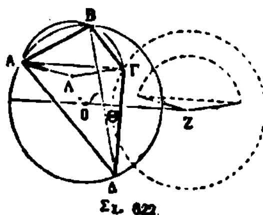
Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ τριγώνου τούτου, ὁρίζεται εὐκόλως καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕΔΓ κλπ.

2) Τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι ὅμοιον τοῦ πρώτου, ἀκόμη καὶ ἂν ἐδίδετο ἡ γωνία δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἀντὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων.

Πρόβλημα 289

1044. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β, τῶν διαγωνίων καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν φ.**

Ἐπὶ τμήματος ΒΔ ἴσου πρὸς τὴν μίαν τῶν διαγωνίων γράφομεν κυκλικὸν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ΒΑΔ. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ τόξου τούτου, φέρομεν τμῆμα ΟΖ, ἴσον πρὸς τὴν ἑτέραν διαγώνιον καὶ σχηματίζον μετὰ τῆς ΒΔ γωνίαν $(\widehat{ΟΖ, ΔΒ}) = (\widehat{ΑΓ, ΔΒ}) = φ$, καὶ γράφομεν περιφέρειαν (Ζ) ἴσην πρὸς τὴν (Ο). Πᾶσα εὐθεῖα, ὡς ἡ ΓΑ, παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον ΖΟ καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο), ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ τῆς ΖΟ· ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ αὕτη κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΑΒΓ νὰ ἔχῃ τὸ δοθὲν μέγεθος Β (§ 919).



Σχ. 622

Πρόβλημα 289—Ι

1045. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν διαγωνίων, τῆς γωνίας των, τῆς γωνίας Α καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ.**

Ὡς καὶ προηγουμένως, ἀλλὰ τὸ σημεῖον Γ ὁρίζομεν ὡς τομὴν τῆς περιφερείας (Ζ) καὶ τῆς (Δ, ΔΓ) (Σχ. 622).

Πρόβλημα 289—II

1046. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν διαγωνίων, τῆς γωνίας των καὶ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ.

Τὸ σημεῖον Γ (Σχ. 622), θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς (Ζ) πάλιν καὶ τοῦ τόξου $(Β, Δ, \widehat{Γ})$.

Πρόβλημα 290

1047. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ διαγωνίων.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον. Ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΔΒ γράφομεν τόξον δεχόμενον τὴν γωνίαν Α καὶ ἔστωσαν Ε, Ζ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν ΓΒ, ΓΔ τοῦ τετραπλεύρου μετὰ τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τόξον τοῦτο. Φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΜΑΝ εἰς τὸ Α.

Αἱ γωνίαι ΜΑΕ, ΝΑΖ εἶναι γνωσταί, ὡς ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ· ἄρα εἶναι γνωστὴ ἡ χορδὴ ΕΖ τῆς περιφερείας ΑΒΔ. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Σχ. 623.

Ἐπὶ τμήματος ΒΔ, ἴσου πρὸς τὴν μίαν τῶν διαγωνίων, γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Α καὶ συμπληροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἣν ἀνήκει. Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Α τοῦ τόξου φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΑΝ καὶ σχηματίζομεν τὰς γνωστὰς γωνίας ΜΑΕ καὶ ΝΑΖ. Ἐπὶ τῆς χορδῆς ΕΖ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν Γ καὶ τέμνομεν αὐτὸ εἰς Γ διὰ τῆς περιφερείας (Α, ΑΓ). Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον. (Desboves, *Questions de Géométrie*, 3e éd., σ. 348).

1048. *Παραλλαγή.* Ἐπὶ τμήματος Β′Δ′ ἴσου πρὸς τὴν μίαν τῶν δοθεισῶν διαγωνίων γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Α, συμπληροῦμεν αὐτὸ εἰς περιφέρειαν καί, θεωροῦντες τυχὸν σημεῖον Α τοῦ τόξου ὡς τὴν κορυφὴν Α τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου, κατασκευάζομεν γωνίας ΑΒ′Γ′, ΑΔ′Γ′ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας Β καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου. Ἔστωσαν Μ, Ν, αἱ τομαὶ τῶν Β′Γ′ καὶ Δ′Γ′ μετὰ τῆς γραφείσης περιφερείας καὶ (ΜΓ′Ν′) ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Μ, Γ′, Ν διερχομένη περιφέρεια.

Σχ. 624.

Ἂν Γ εἶναι ἡ τομὴ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς (Α, ΑΓ=ν) καὶ Β, Δ αἱ τομαὶ τῶν ΓΜ, ΓΝ καὶ τῆς πρώτης περιφερείας, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον. (Alexandroff).

Πρόβλημα 290—Ι

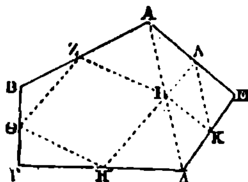
1048 β. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΓ δύο περιφερειῶν ΒΑΔ, ΒΓΔ (Σχ. 623), τοιαύτη, ὥστε τὸ μὲν μῆκος αὐτῆς νὰ εἶναι δοθὲν λ, ἡ δὲ γωνία ΑΔΓ ὡρισμένη.

Ἄλλη διατύπωσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος· ἐπειδὴ δίδονται τὰ μήκη τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ καὶ αἱ γωνίαι Α, Γ, Δ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Πρόβλημα τοῦ Lionnet 291

1049. Νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ΑΒΓΔΕ τοῦτο καὶ Ζ, Θ, Η, Κ, Λ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. Μία τυχοῦσα διαγώνιος ΑΔ διαιρεῖ τὸ πεντάγωνον εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ εἰς ἓν τρίγωνον ΑΔΕ.



Σχ. 625.

Ἔστω Ι τὸ μέσον τῆς διαγωνίου αὐτῆς· τὸ παραλληλόγραμμον ΖΘΙΗ εἶναι κατασκευάσιμον, ἀφοῦ γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του Ζ, Θ, Η, καθώς, ἑπομένως, καὶ τὸ τρίγωνον ΙΚΛ. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ κατασκευάζεται, καθὼς καὶ τὸ πεντάγωνον, δι' ἀγωγῆς τῶν ΑΖΒ, ΔΗΓ τμημάτων, διπλασίων ἀντιστοίχως τῶν ΑΖ καὶ ΔΗ.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα

1050. *Ἐλαχίστη περίμετρος.* Αἱ τρεῖς πρῶται ἑπόμεναι ἀσκήσεις ἀναφέρονται εἰς τὸ Ι Βιβλίον. Πᾶσα ἐλαχίστη περίμετρος, αναχθεῖσα εἰς τεθλασμένην γραμμὴν μεταξὺ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β, θὰ πρέπει, ἢ νὰ ταυτίζεται πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒ ἢ νὰ εἶναι ἡ μικροτέρα τεθλασμένη γραμμή, ἡ ἔχουσα ἄκρα τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ ὑποκειμένη εἰς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Μεγίστη γωνία. Ἡ μεγίστη τιμὴ μιᾶς γωνίας τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων, εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον, τὸ διερχόμενον διὰ τῶν σημείων αὐτῶν καὶ ἀνῆκον εἰς περιφέρειαν τῆς ἐλαχίστης, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ἀκτῖνος. Ἡ ἐλαχίστη γωνία θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν μεγίστην ἀκτῖνα καὶ ἡ τιμή της θὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, δηλ. αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας θὰ τείνουν νὰ ἀποβοῦν παράλληλοι, ὅταν ἡ ἀκτὶς αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Μέθοδοι. Διὰ τὴν λύσιν τῶν σχετικῶν ἀσκήσεων, ἀνατρέχομεν εἰς τὰς μεθόδους τὰς ἤδη ὑποδειχθείσας (§ 335).

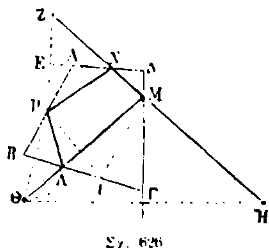
Θὰ χρησιμοποιοῦμεν λοιπόν, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως, τὸν *διπλασιασμὸν* ἢ *συμμετρίαν*, τοὺς *γεωμετρικοὺς τόπους*, τὴν μέθοδον τῆς *παραμέτρου* κλπ.

Πρόβλημα 292

1051. Ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδεται σημεῖον Ρ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν σημεῖα Ν, Μ, Λ ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν

τοῦ σχήματος τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράπλευρον ΡΝΜΛ νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ, συμμετρικὰ τοῦ Ρ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ τετραπλεύρου, ὡς καὶ τὸ σημεῖον Η συμμετρικὸν τοῦ Θ πρὸς τὴν ΑΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΗ, ΝΡ, ΜΘ, ΛΡ· τὸ τετράπλευρον ΡΝΜΛ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐλαχίστης περιμέτρου, ἴσης πρὸς ΖΗ. Πράγματι, δι' ἓν οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον Ι τῆς πλευρᾶς ΒΓ λ. χ., θὰ ἔχωμεν


Σχ. 626

$$ΡΙ + ΙΜ > ΡΛ + ΛΜ.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ ἀπόδειξις δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὁ δρόμος ΡΝΜ... ἤρχετο ἀπὸ σημείου Ρ καὶ κατέληγε εἰς σημεῖον Σ, ἀμφοτέρων ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου κειμένων.

2) Ὁμοίως, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ ἴδιον πρόβλημα δι' ἓν τυχὸν πολύγωνον, θεωροῦντες τὸ συμμετρικὸν $Ρ_1$ τοῦ Ρ πρὸς τὴν ΑΔ, τὸ συμμετρικὸν $Ρ_2$ τοῦ $Ρ_1$ πρὸς τὴν ΔΓ, τὸ συμμετρικὸν $Ρ_3$ τοῦ $Ρ_2$ πρὸς τὴν ἑπομένην αὐτῆς πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κλπ.

Σημείωσις. Εἰς τὴν *Journal d. Math. Élémentaires* τοῦ Longchamps, ὁ Catalan προέτεινε διὰ ἀπόδειξιν τὸ ἑξῆς Θεώρημα: *Ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαχίστου τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου* ΡΝΜΛ, *εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ* Ρ *ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον. Ἡ ἀπόδειξις ἐδημοσιεύθη τὸ 1891 εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν (σ. 139, Sollertinski).

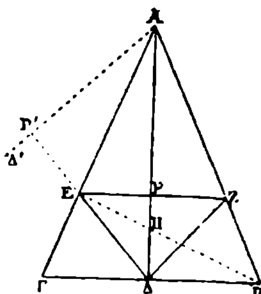
Πρόβλημα 292—Ι

1061 α. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ὕψους ἰσοσκελοῦς τριγώνου σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ποδικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον (Soons).

Τὸ ποδικὸν τρίγωνον σημείου Η εἶναι τὸ τρίγωνον τῶν ποδῶν τῶν ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Θὰ πρέπει τὸ ἄθροισμα ΕΔ + ΕΡ νὰ καταστῇ ἐλάχιστον.

Ἀναφερόμενοι εἰς ἤδη λυθὲν πρόβλημα (§ 147, α), παρατηροῦμεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ΔΕΡ' ἐπὶ τὴν συμμετρικὴν ΑΔ' τῆς ΑΔ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος ΕΗΒ τῆς γωνίας ΔΕΖ εἶναι τὸ ἐκ τοῦ Β ὕψος ΒΕ τοῦ τριγώνου, (§ 662) ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.


Σχ. 627.

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω λύσις ὑποθέτει ὀξεῖαν τὴν γωνίαν Α· ἐὰν αὕτη εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἐλαχίστη περίμετρος εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐκ τοῦ Α ὕψους ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Πρόβλημα 293

1052. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο ΔΕΖ ἐλαχίστης περιμέτρου.

1η Λύσις. Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ προβλήματος, ὑποθέσωμεν ὅτι μία κορυφὴ Δ τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι σταθερὸν σημεῖον.

Ὁ ἐλάχιστος τότε δρόμος ΔΕΖΔ εἶναι ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ τῶν τομῶν Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ τῆς εὐθείας ΗΘ, τῆς ἑνούσης τὰ συμμετρικὰ σημεῖα, Η καὶ Θ, τοῦ σημείου Δ πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι

$$ΔΕ + ΕΖ + ΖΔ = ΘΗ.$$

Σχ. 628.

Διὰ τὴν πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματος, θὰ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα ΗΘ. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΘΒΟ, ΗΓΟ ἔχουν θέσιν ἀνεξάρτητον τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἀφοῦ αἱ γωνίαι ΑΒΘ, ΑΓΗ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ΒΘ = ΒΔ, ΓΗ = ΓΔ, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΘΟΗ εἶναι ἴση πρὸς ΟΒ + ΒΓ + ΟΓ, δηλ. σταθερά. Γίνεται, ἑπομένως, ἡ βάσις ΘΗ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἐλαχίστη ὅταν τοῦτο ἀποβῇ ἰσοσκελές.

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ λάβωμεν

$$ΟΘ = ΟΗ = \frac{ΟΒ + ΒΓ + ΟΓ}{2},$$

νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΘΕΖΗ καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὸ Δ ὡς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Θ ἢ πρὸς τὴν ΑΒ ἢ τοῦ Η πρὸς τὴν ΑΓ.

2α Λύσις. Θεωροῦντες τὴν κορυφὴν Δ σταθεράν, ζητήσωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὰς θέσεις τῶν δύο ἄλλων σημείων Ε, Ζ.

Ὡς εὕρομεν προηγουμένως, ἡ εὐθεῖα τῶν, συμμετρικῶν τοῦ Δ, σημείων Θ καὶ Η ὁρίζει τὸ ἐλάχιστον τῆς περιμέτρου ΔΕΖ, διὰ μίαν ὡρισμένην θέσιν τοῦ Δ.

Ἐπειδὴ ὅμως ΑΘ = ΑΔ = ΑΗ, τὸ τρίγωνον ΘΑΗ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ γωνία ΘΑΗ εἶναι διπλασία τῆς Α τοῦ δοθέντος τριγώνου, δηλ. σταθερά. Γίνεται λοιπὸν ἡ ΘΗ ἐλαχίστη ὅταν καταστῇ ἐλαχίστη καὶ ἡ πλευρὰ ΑΘ = ΑΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου· δηλαδὴ ὅταν τὸ Δ εἶναι ὁ πούς τοῦ ἐκ τοῦ Α ὕψους τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Παρατήρησις. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ *ὀρθικὸν* τοῦ ΑΒΓ.

1052 α. Ἡ πρώτη λύσις ὀφείλεται εἰς τὸν Catalan (*Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaires*, σ. 17). Τὸ πρόβλημα ἐπεκτείνεται καὶ διὰ σφαιρικὰ τρίγωνα· σχετικὴ λύσις ἐδόθη εἰς Α.Ν. 1870, σ. 212, ὑπὸ E. Lindelof.

Πρόβλημα 293—I

1053. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ ὀλισθαίνει ἐπὶ εὐθείας ΧΥ. Εὕρετε τὴν θέσιν τοῦ τμήματος ἐπὶ τῆς εὐθείας, δι' ἣν ἡ τεθλασμένη

γραμμὴ $AM + MN + NB$ γίνεται ἐλαχίστη, ἂν A καὶ B εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας XY κείμενα.

Ὑποθέτοντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἀναφερόμενοι εἰς γνωστὸν ζήτημα (§ 137), εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ σημεῖον N πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς XY καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ συμμετρικὸν Δ τοῦ σημείου B πρὸς τὴν XY μὲ τὸ σημεῖον Γ, τὸ προκύπτον ἐκ τῆς παραλλήλου, πρὸς τὴν XY, μεταφορᾶς τοῦ A κατὰ τμῆμα

$$A\Gamma = MN = \lambda.$$

Σχ. 629.

Πᾶσα ἄλλη τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΖΒ ἢ ΑΓΖΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΝΒ.

Παρατήρησις. Αἱ γωνίαι ΑΜΝ καὶ ΜΝΒ εἶναι ἴσαι.

Πρόβλημα 293—II

1054. Νὰ τοποθετηθῇ τὸ τμῆμα MN εἰς τρόπον, ὥστε $AM = BN$ (Σχ. 629).

Φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Ἡ τομή της μετὰ τῆς XY ὁρίζει τὴν θέσιν τοῦ ἄκρου τοῦ τμήματος.

Πρόβλημα 293—III

1055. Νὰ τοποθετηθῇ τὸ τμῆμα MN εἰς τρόπον, ὥστε

$$\frac{AM}{BN} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad AM^2 \pm BN^2 = \kappa^2.$$

Γράφομεν τοὺς τόπους τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰ Γ, Δ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$ ἢ διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπ' αὐτῶν εἶναι κ^2. Αἱ τομαὶ τῶν γραμμῶν αὐτῶν καὶ τῆς XY καθορίζουν τὰς λύσεις τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων.

Πρόβλημα 294

1056. Ἐκ πάντων τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ποῖον τὸ ἔχον τὴν μεγίστην γωνίαν εἰς τὴν κορυφήν;

Εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ.

Ἔστω, πράγματι, ΑΔΓ ἓν ἄλλο τρίγωνον, ἔχον τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς παραλλήλου ΒΔ πρὸς τὴν βάσιν. Διὰ πᾶν σημεῖον Δ, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ΖΕ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, τὸ τόξον $(A, \Gamma, \widehat{\Delta})$ τέμνει τὴν ΕΒ εἰς σημεῖον Ε δι' ὃ $ZE > \Delta H$.

Ἀλλ' ἡ γωνία Β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Ε, ἀφοῦ $B = \Theta$ καὶ $\Theta = E + \Theta\Gamma E$. Ὥστε γωνια $\Delta = E = \Theta - \Theta\Gamma E = B - \Theta\Gamma E$ καὶ γίνεται αὔτη μεγίστη διὰ τὴν ἐλαχίστην γωνίαν ΘΓΕ. Δηλαδὴ διὰ $\Delta \equiv B$.

Σχ. 630

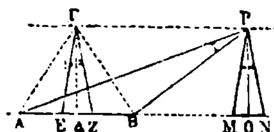
Πρόβλημα 294—Ι

1057. Ἐκ πάντων τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ τῶν ὁποίων τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ποῖον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν Β:

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΑΗΓ = Η, τὸ ἐλάχιστόν της ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τῆς γωνίας Η, δηλ. διὰ τρίγωνον ΑΗΓ ἰσοσκελὲς (§ 1056), ἢ διὰ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπίσης ἰσοσκελές.

Πρόβλημα 295

1058. Μία σταθερὰ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Ρ, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς τέμνουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΟΑ κατὰ τμῆμα ΜΝ. Διὰ ποίαν θέσιν τῆς γωνίας τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τούτου γίνεται ἐλάχιστον;



Σχ. 631.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου. Οἱ ἑπόμενοι συλλογισμοὶ χρησιμεύουν ὅπως, εἰς πλείστας περιπτώσεις, πορίζώμεθα λύσιν ἑνὸς προβλήματος ἐλαχίστου ἐξ ἑνὸς συγγενοῦς πρὸς αὐτὸ προβλήματος μεγίστου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω ΑΡΒ τυχοῦσα θέσις τῆς κινητῆς γωνίας. Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα (§ 1056), ἡ γωνία ΑΓΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΒ, τοῦ ἔχοντος τὴν κορυφήν του Α ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΡΒ. Δὲν δύναται λοιπὸν τὸ τρίγωνον τοῦτο νὰ δίδῃ τὸ ἐλάχιστον τμῆμα ΑΒ. Καὶ ἐπειδὴ δι' ἓν τμῆμα δοθέντος μήκους, τὸ μέγιστον τῆς ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας λαμβάνεται ὅταν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος (§ 1056), γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ ἐλάχιστον τμῆμα εἶναι ἡ βάσις ΕΖ ἢ ΜΝ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΓΖ ἢ τοῦ ἴσου του ΜΡΝ.

1059. *Παρατήρησις.* Πλεῖστα προβλήματα [μεγίστου ἢ ἐλαχίστου] ὁδηγοῦν εἰς τὰ ἀντίθετά των. Διὰ δοθεῖσαν βάσιν καὶ δοθὲν ὕψος λ. χ., ἡ μεγίστη γωνία ἀντιστοιχεῖ, ὡς εἴδομεν, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἑπομένως, διὰ δοθὲν ὕψος καὶ δοθεῖσαν γωνίαν εἰς τὴν κορυφήν, τὸ μῆκος τῆς βάσεως γίνεται ἐλάχιστον διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τριγωνόν.

Ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ βάσις καὶ ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν εἶναι δεδομένα μεγέθη, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι τὸ τοῦ μεγίστου ὕψους.

Πρόβλημα 295—Ι

1060. Μεταξὺ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων βάσιν ὡρισμένου μήκους καὶ ὄντων περιγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, ποῖον τὸ ἔχον γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν μεγίστην;

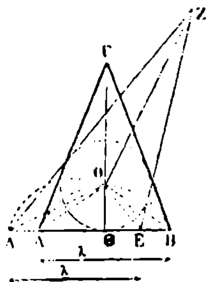
Θεωρήσωμεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓν ἄλλο οἱονδήποτε, ἐκ τῶν θεωρουμένων, ΔΕΖ τοιοῦτον, ὥστε ΑΒ = ΔΕ = λ.

Αἱ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὰς βάσεις γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων

τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Ο τοῦ κοινοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὰ κύκλου. Ἀφ' ἑτέρου, γνωρίζομεν ὅτι (§ 466)

$$\text{γων. } AOB = 90^\circ + \frac{\Gamma}{2}, \quad \Delta OE = 90^\circ + \frac{Z}{2}$$

καὶ ἑπομένως εἰς τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν εἰς τὸ κέντρον ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἰς τὴν κορυφήν. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν μεγεθῶν τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΔΟΕ.



Σχ. 632.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ, τὸ τμῆμα ΟΘ εἶναι τὸ βέλος τοῦ τόξου τοῦ δεχομένου γωνίαν ΑΟΒ, ἐνῷ διὰ τὸ τόξον ΔΟΕ, τὸ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΔΟΕ, τὸ τμῆμα τοῦτο δὲν εἶναι παρὰ ἡ τεταγμένη ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ τόξου.

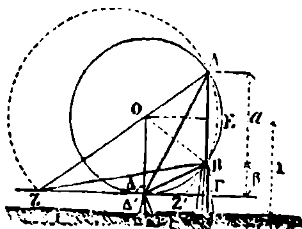
Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ τόξον ΒΟΑ εἶναι μικρότερον τοῦ τόξου ΕΟΔ (ἀφοῦ ἔχουν τὴν ἰδίαν χορδὴν ἀλλὰ βέλος μικρότερον τὸ πρῶτον ἀπὸ τὸ δεύτερον) ἢ

$$\Delta\widehat{O}E < AOB \text{ καὶ συνεπῶς } \widehat{Z} < \widehat{\Gamma}.$$

Ὥστε: *ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν γίνεται μεγίστη ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.*

Πρόβλημα 296

1081. Κατακόρυφος ἱστὸς ΑΒ, μήκους α, εἶναι τοποθετημένος ἐπὶ τῆς κορυφῆς πύργου ΒΓ, ὕψους β. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ πύργου καὶ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ τῆς βάσεώς του θὰ πρέπει νὰ ἵσταται παρατηρητής, ὥστε νὰ βλέπῃ τὸν ἱστὸν ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν;



Σχ. 633.

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ $\overset{\frown}{AB\Delta}$ τόξον διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ δεχόμενον τὴν μεγίστην γωνίαν Δ. Τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ ἐφάπτεται τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΓΔ τοῦ ἀγομένου διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ· ἐπειδὴ διὰ πᾶν ἄλλο τόξον ΑΒΖ, διερχόμενον διὰ τῶν ΑΒ καὶ τέμνον τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ζ, ἡ ἀκτίς του θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΟΔ καὶ ἑπομένως $\widehat{Z} < \widehat{\Delta}$.

Τὸ πρόβλημα κατὰ ταῦτα ἀνάγεται εἰς τὴν ἀγωγὴν περιφερείας διὰ τῶν Α, Β, ἐφαπτομένης τῆς ὁριζοντίου ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι $O\Delta = \beta + \frac{\alpha}{2}$, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ ἔχῃ κέντρον τὴν τομὴν Ο τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας $\left(B, \beta + \frac{\alpha}{2}\right)$. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ ὁρίζει τὴν ζητουμένην θέσιν τοῦ παρατηρητοῦ.

1062. Παρατηρήσεις: 1) Ἀπὸ τὸ ὁλικὸν ὕψος τοῦ πύργου θὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀνάστημα τοῦ παρατηρητοῦ.

2) Ἡ μεγίστη γωνία ΑΔΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΟΒ ἢ Δ = ΒΟΕ. Ἀφ' ἑτέρου, χρησιμοποιοῦντες τὸ ΙΙΙ Βιβλίον καὶ Τριγωνομετρίαν:

$$\Gamma\Delta^2 = (\alpha+\beta)\beta, \quad BE^2 = \frac{\alpha^2}{4}.$$

Ὥστε:

$$\left(\frac{BE}{OE}\right)^2 = \varepsilon\varphi^2(BOE) = \frac{\alpha^2}{4(\alpha+\beta)\beta} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\,\Delta = \frac{BE}{O\Delta} = \frac{\alpha}{\alpha+2\beta}.$$

3) Ἐὰν τὸ ἔδαφος δὲν ἦτο ὁριζόντιον, τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο ἐπίσης ἁπλῶς: τὸ τόξον ΑΔΒ θὰ ἔπρεπε νὰ ἦτο ἐφαπτόμενον εὐθείας ΓΔΖ παραλλήλου πρὸς τὸ ἔδαφος (ὑποτιθεμένου ἐπιπέδου). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις ([55]).

Πρόβλημα 296—Ι

1063. Δίδονται δύο εὐθεῖαι καὶ περιφέρεια· δι' ἑκάστου σημείου τῆς περιφερείας φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας. Μελετήσατε τὰς μεταβολὰς τοῦ ἀθροίσματος δύο παρακειμένων πλευρῶν τῶν οὕτω σχηματιζομένων παραλληλογράμμων.

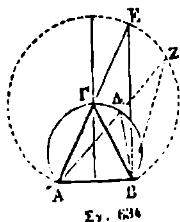
(Βλ. *Μέθοδοι*, § 340).

Πρόβλημα 297

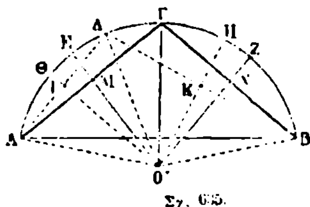
1064. Ἐκ τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ εἰς τὴν κορυφήν, ποῖον τὸ μεγίστης περιμέτρου;

1η Ἀπόδειξις. Τοῦτο εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς (Σχ. 634).

Ἔστω πράγματι ἓν ἄλλο ΑΔΒ ἐγγεγραμμένον, φυσικά, εἰς τὸ



Σχ. 634



Σχ. 635.

αὐτὸ τόξον ΑΓΔΒ. Ἂν λάβωμεν ΓΕ = ΓΒ, ΔΖ = ΔΒ, τὰ ἀθροίσματα ΑΓ + ΓΒ, ΑΔ + ΔΒ, ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΑΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εὑρίσκονται προφανῶς ἐπὶ τοῦ τόξου $\left(A, B, \frac{\varphi}{2}\right)$, τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ = ΓΒ = ΓΕ, γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ μέγιστον τμῆμα ΑΖ εἶναι ἡ διὰ τοῦ Α διάμετρος ΑΓΕ τῆς περιφερείας ΑΕΖΒ.

---

55. Σημ. μετ. Ἑκατέρωθεν τοῦ πύργου καὶ εἰς ἀνίσους αποστάσεις ἀπ' αὐτοῦ.

Ἤτοι, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι τὸ τῆς μεγίστης περιμέτρου, ἀφοῦ

$$ΑΓ + ΓΒ > ΑΔ + ΔΒ.$$

1065. *Δευτέρα ἀπόδειξις* (Σχ. 635). Ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ΑΓΒ τόξου, φέρομεν καθέτους ΟΙΘ. ΟΚΗ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τυχόντος ἄλλου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ αὐτὸ τόξον, τριγώνου ΑΔΒ. Τὸ ἄθροισμα ΑΔ + ΔΒ γίνεται μέγιστον ὅταν καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ΔΙ + ΔΚ γίνῃ μέγιστον.

Ἀφ' ἑτέρου, τὸ τόξον ΘΔΗ εἶναι σταθερόν, ὡς ἥμισυ τοῦ ΑΓΒ καί, κατὰ τὰς §§ 339 καὶ 340 (παρατήρησις), τὸ ἄθροισμα ΔΙ+ΔΚ γίνεται μέγιστον ὅταν τὸ σημεῖον Δ εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου παραλλήλου πρὸς τὴν ΘΖ, δηλ. ὅταν τὸ Δ συμπίπτῃ πρὸς τὸ μέσον τοῦ τόξου τούτου. Ἀλλὰ τότε

$$ΑΘ = ΘΔ = ΔΗ = ΗΒ$$

καὶ τὸ Δ θὰ εἶναι τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου ΑΓΒ.

1066. *3η Ἀπόδειξις*. Ἡ μέθοδος τοῦ διπλασιασμοῦ ἢ συμμετρίας ὁδηγεῖ ἐπίσης πολὺ ἁπλῶς εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τοῦ τόξου ΑΘΒ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος αὐτῆς διὰ τοῦ διαμετρικοῦ τοῦ Θ σημείου Γ. Ἔστω Ζ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς τὴν ΓΔ· θὰ ἔχωμεν

$$ΓΖ = ΓΒ \quad \text{καὶ} \quad ΑΖ < ΑΓ + ΓΖ$$

ἢ $$ΑΔ + ΔΒ < ΑΓ + ΓΒ.$$

Σχ. 636.

Παρατήρησις. Ὅταν ἡ κορυφὴ Δ πλησιάζῃ πρὸς τὸ Γ, τὸ ἄθροισμα ΑΔ + ΔΒ = ΑΖ αὐξάνει, ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία ΑΓΖ αὐξάνει διατηροῦσα πάντοτε δύο πλευρὰς ἴσας καὶ σταθεροῦ μήκους.

Πράγματι, γων. ΑΓΖ = ΑΓΒ + 2.ΒΓΔ.

Πρόβλημα 298

1067. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς περιφέρειαν τὸ μεγίστης περιμέτρου τρίγωνον.

Ἔστω ΑΒΓ ἓν τυχὸν τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν. Θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν ἕνα τῶν μεταβλητῶν μεγεθῶν ὡς σταθερόν, λ. χ. τὴν βάσιν ΑΓ. Ὡς εἴδομεν προηγουμένως (§ 1064), ἡ περίμετρος τῶν τριγώνων ΑΓΒ γίνεται μεγίστη διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΔ. Ἐπομένως, *ἐὰν ὑπάρχουν δύο πλευραὶ μεταβληταὶ* ΑΒ, ΓΒ, *αἱ πλευραὶ αὗται πρέπει νὰ γίνουν ἴσαι* κατὰ τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Β, τὴν ἀντίστοιχον τῆς μεγίστης περιμέτρου.

Ὅμοιος συλλογισμὸς ἀποδεικνύει, ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΑΔ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης περιμέτρου διὰ τὰ τρίγωνα μὲ σταθερὰν τὴν βάσιν ΓΔ. Τὸ τρίγωνον ἐπομένως τῆς μεγίστης περιμέτρου εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Σχ. 637

Θεώρημα 298—I

1068. Δι' ἕνα ὡρισμένον πλῆθος πλευρῶν, τὸ κανονικὸν εἶναι τὸ μεγίστης περιμέτρου πολύγωνον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς δοθέντα κύκλον.

Εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως· ἐπειδή, ἂν τὸ μεγίστης περιμέτρου πολύγωνον εἶχε καὶ δύο μόνον ἀνίσους συνεχομένας πλευράς, θὰ ὑπῆρχε ἓν ἄλλο ἔχον μεγαλυτέραν περίμετρον· ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον αἱ πλευραὶ αὗται θὰ ἦσαν ἴσαι.

Θεώρημα 298—II

1069. Ἐκ δύο κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸ ἔχον τὰς περισσοτέρας πλευρὰς εἶναι καὶ τὸ τῆς μεγαλυτέρας περιμέτρου.

Πράγματι, θεωρήσωμεν τὸ ἰσόπλευρον λ. χ. τρίγωνον ΑΔΓ (Σχ. 637) καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΓΔΕ. Θὰ ἔχωμεν ΑΕ + ΕΔ > ΑΔ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου θὰ ἦτο μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἀλλ' ἀπεδείχθη προηγουμένως, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου· ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κλπ.

Πρόβλημα 299

1070. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τὸ μεγίστης περιμέτρου τετράπλευρον καὶ βάσιν ἔχον τὴν διάμετρον.

Συλλογισμοὶ ὅμοιοι πάλιν πρὸς τοὺς προηγουμένως ἐκτεθέντας, μᾶς πείθουν ὅτι αἱ τρεῖς μεταβληταὶ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι εἰς τὴν θέσιν ἐλαχίστης περιμέτρου. Τὸ ζητούμενον ἑπομένως τετράπλευρον εἶναι κανονικὸν ἡμιεξάγωνον.

Πρόβλημα 299—I

1071. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τετράπλευρον, ἔχον ὡς περίμετρον δοθὲν μῆκος καὶ πλευρὰν ἀπέναντι τῆς διαμέτρου ὡρισμένην λ. Ποῖον εἶναι τὸ μεγίστης περιμέτρου ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων:

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω δ ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος 2ρ + λ ἀπὸ τῆς περιμέτρου, δηλ. τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΓΔ (Σχ. 638). Λαμβάνοντες ΔΕ = λ, βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ΓΔ = ΒΕ καὶ ἑπομένως, ὅτι τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ (ὡρισμένου) τόξου ΑΕ εἰς δύο τμήματα μὲ ἄθροισμα χορδῶν ΑΒ + ΒΕ = δ· ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΑΒΕ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (§§ 921, 989).

Σχ. 638.

Γράφομεν, πρὸς τοῦτο, τὴν περιφέρειαν, τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου ΑΕ καὶ ἀκτῖνα ΖΕ, καὶ τέμνομεν αὐτὴν εἰς Θ διὰ τῆς περιφερείας (Ε, δ). Φέρομεν καὶ τὴν ΘΕ.

Θὰ ἔχωμεν ΑΒ + ΒΕ = ΕΘ = δ.

Ἂν λάβωμεν ΔΓ = ΒΕ θὰ εἶναι καὶ ΒΓ = ΔΕ = λ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μέγιστον. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον ἄθροισμα ΑΒ + ΒΕ, δηλ. διὰ ἴσας χορδὰς ΑΖ, ΖΕ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ χορδὴ ΒΓ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον.

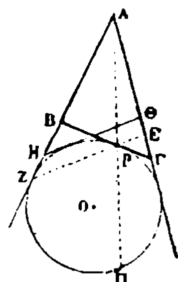
Πρόβλημα 299—II

1072. Διὰ σημείου δοθέντος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τρίγωνον ἐλαχίστης περιμέτρου.

Ἔστω Ρ τὸ σημεῖον ἐντὸς τῆς γωνίας Α. Τὸ θεώρημα (§ 739) ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν:

Γράφομεν περιφέρειαν Ο διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Ρ, ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΒΡΓ εἰς τὸ σημεῖον Ρ (§ 948).

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης τοῦ τυχόντος ἄλλου ΑΕΖ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ρ. Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΡΓ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ διάφορος αὐτῆς εὐθεῖα ΕΡΖ θὰ εἶναι τέμνουσα, πρὸς τὴν ὁποίαν ἔστω ΗΘ ἡ παράλληλος ἐφαπτομένη. Ἡ δὲ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΕΖ εἶναι βεβαίως μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΗΘ, ἴσης, ὡς γνωστόν, πρὸς ἐκείνην τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἑπομένως...



Σχ. 639.

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ σημείου Ρ ἄγονται δύο περιφέρειαι (Ο), (Ο') ἐφαπτόμεναι τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α. Ἐκλέγομεν διὰ τὴν κατασκευὴν ἐκείνην διὰ τὴν ὁποίαν, εἰς μίαν τέμνουσαν αὐτῆς ΑΡΠ, τὸ σημεῖον Ρ εἶναι πλησιέστερον τῆς κορυφῆς Α ἢ τὸ Π.

Πρόβλημα 299—III

1073. Διὰ δοθέντος σημείου ἐντὸς γωνίας Α, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τρίγωνον, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ διαφορὰ τῆς βάσεως ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α εἶναι ἡ ἐλαχίστη.

Ἐκ τῶν δύο περιφερειῶν τῆς προηγουμένης *Παρατηρήσεως* ἐκλέγεται ἡ (Ο').

Πρόβλημα 299—IV

1073 α. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ = 2 ρ· νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε, προβάλλοντες αὐτὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ρ, νὰ ἔχωμεν ΑΡ+ΜΡ=μ. Ποῖον τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος τούτου;

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ τῆς § 99:

Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς διαμέτρου ΑΒ, λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ = μ καὶ φέρομεν εὐθεῖαν ΕΔ κεκλιμένην κατὰ 45° πρὸς τὴν ΔΑ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν:

1) Εἰς ἓν σημεῖον Μ, ἂν μ < ΑΒ.

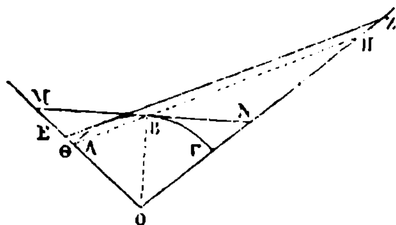
2) Εἰς δύο σημεῖα Μ, Μ', ἂν ΑΒ $\leqslant \mu < \rho(1+\sqrt{2})$.

3) Εἰς δύο σημεῖα συμπίπτοντα (καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας), ἂν $\mu = \rho(1+\sqrt{2})$· ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ μ εἶναι καὶ ἡ μεγίστη δυνατὴ διὰ τὸ ἄθροισμα ΑΡ + ΜΡ.

4) Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ $\mu > \rho(1+\sqrt{2})$, δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 300

1074. Δίδεται κυκλικὸν τόξον ΑΒΓ. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΓ τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος ἐλάχιστον.



Σχ. 640.

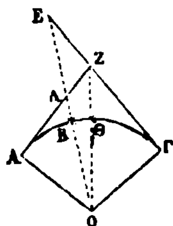
Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέσον Β τοῦ τόξου. Πράγματι, μία ἄλλη ἐφαπτομένη ΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς παραλλήλου της ΘΒΗ· καὶ ἡ δευτέρα αὕτη εὐθεῖα, ὡς ἀγομένη διὰ τοῦ μέσου Β τῆς βάσεως ΜΝ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΟΝ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΝ. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΜΝ < ΕΖ.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς τοῦ τῆς § 1058.

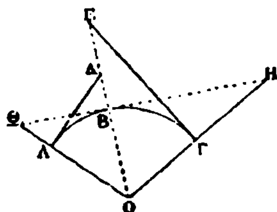
Πρόβλημα 301

1075. Κυκλικὸν τόξον ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο μέρη $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$ καὶ ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα του ΑΔΖ, ΓΖΕ, τεμνόμεναι διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ προεκτεινομένης εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Β ἐπὶ τοῦ τόξου, τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΔ καὶ ΓΕ γίνεται ἐλάχιστον;

Ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον Α πλησιέστερον τοῦ Β ἢ τὸ σημεῖον Γ καὶ



Σχ. 641.



Σχ. 642.

κατ' ἀκολουθίαν: γων. ΑΟΒ < ΒΟΓ, γων. ΕΔΖ > ΔΕΖ, ἀφοῦ αἱ δύο τελευταῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῶν πρώτων. Εἰς

τὸ τρίγωνον συνεπῶς ΕΖΔ, ἡ πλευρὰ ΔΖ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΖΕ καὶ θὰ ἔχωμεν

$$ΑΔ + ΓΕ = ΑΖ - ΖΔ + ΓΖ + ΖΕ =$$
$$= ΑΖ + ΓΖ + (ΖΕ - ΔΖ) > ΑΖ + ΓΖ.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος ΑΔ + ΓΕ θὰ συμβῇ ὅταν ἡ διαφορὰ ΖΕ − ΖΔ μηδενισθῇ, δηλ. διὰ θέσιν τοῦ σημείου Β συμπίπτουσαν πρὸς τὸ μέσον Θ τοῦ τόξου ΑΓ.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β (Σχ. 642). Θὰ ἔχωμεν:

$$ΒΘ = ΑΔ, \quad ΒΗ = ΓΕ,$$

καὶ ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ προηγούμενον (§ 1074) πρόβλημα.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προβλημάτων §§ 1074, 1075, πορίζόμεθα τὰς ἑπομένας δύο προτάσεις.

Θεώρημα 301—I

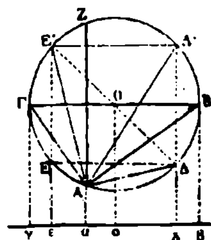
1076. 1) Ἵνα μία τεθλασμένη γραμμὴ ὡρισμένου πλήθους πλευρῶν, περιγεγραμμένη εἰς τόξον καὶ περατουμένη εἰς τὰ ἄκρα του, ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον μῆκος, πρέπει ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς νὰ ἐφάπτεται τοῦ τόξου εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους της καὶ πᾶσαι αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι.

2) Ἐκ τῶν πολυγώνων ὡρισμένου πλήθους πλευρῶν, τῶν περιγεγραμμένων εἰς δοθέντα κύκλον, τὸ κανονικὸν εἶναι τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

Πρόβλημα 301—II

1077. Διὰ σημείου Α δοθείσης περιφερείας φέρομεν χορδὴν μεταβλητὴν καὶ προβάλλομεν αὐτὴν ἐπὶ σταθερὰν εὐθεῖαν (ε). Νὰ μελετηθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους τῆς προβολῆς.

Τὸ σχῆμα καθιστᾷ καταφανῆ τὸν τρόπον τῆς μεταβολῆς αὐτῆς. Ὑποθέτοντες τὴν κίνησιν τῆς χορδῆς ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, βλέπομεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐξάνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ αβ, ἀντιστοίχου χορδῆς ΑΒ περατουμένης εἰς τὸ ἄκρον τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε) διαμέτρου ΓΒ τῆς περιφερείας, καὶ (σχετικοῦ) μεγίστου αὐτοῦ. Ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης, τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ἐλαττοῦται μέχρι τῆς θέσεως ΑΖ αὐτῆς, ὁπότε μηδενίζεται, καὶ κατόπιν ἄρχεται πάλιν αὐξανόμενον μέχρι τοῦ (σχετικοῦ πάλιν) μεγίστου αγ, ἀντιστοίχου τῆς θέσεως ΑΓ. Ἀπὸ τῆς θέσεως πάλιν αὐτῆς ἄρχεται ἐλαττούμενον μέχρι μηδενισμοῦ του.

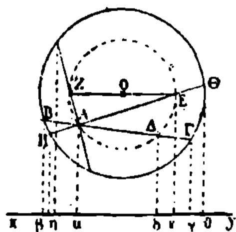


Σχ. 643.

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὰ μήκη τῶν προβολῶν προσθέσωμεν σημεῖον κατὰ τὰ ἐν § 412, θὰ θεωρῶμεν τὰς προβολὰς αδ θετικάς, ἀρνητικὰς τὰς αε, μεγίστην τιμὴν αὐτῶν τὴν αβ καὶ ἐλαχίστην τὴν αγ.

Πρόβλημα 301—III

1078. Διὰ σημείου Α ληφθέντος ἐντὸς κύκλου, νὰ ἀχθῇ χορδὴ τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν προβολῶν τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Α, ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΧΥ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.



Σχ. 644.

Θεωροῦντες τὴν ὁμόκεντρον τῆς δοθείσης περιφέρειαν (Ο, ΟΑ), παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι, ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΔΓ μιᾶς τυχούσης χορδῆς ΒΑΓ εἶναι ἴσα, ἡ διαφορὰ τῶν προβολῶν τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν προβολὴν αδ τῆς χορδῆς ΑΔ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΑ). Τὸ μέγιστον ἑπομένως τοῦ μήκους αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν (§ 1077), εἰς τὴν θέσιν ΗΑΕΘ τῆς μεταβλητῆς χορδῆς διὰ τοῦ σημείου Α.

Ἡ θέσις ΑΖ τῆς χορδῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν δεύτερον (σχετικὸν) μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον (§ 417) ἐὰν θεωρῶμεν τὰς προβολὰς αη, αβ ὡς ἐχούσας ἀρνητικὰ μήκη.

Πρόβλημα τοῦ Fermat 302

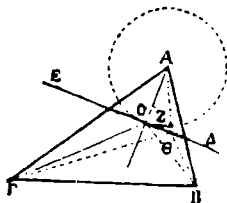
1079. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τριγώνου εἶναι ἐλάχιστον.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ΑΟ + ΒΟ + ΓΟ ἐλάχιστον.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ἢ κείμενον ἐπὶ τῆς περιμέτρου του. Διότι ἐὰν ἦτο ἐξωτερικὸν εἰς τὴν θέσιν Ε λ. χ., ὀνομάζοντες Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΒΕ καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ φέροντες τὰς ΕΑ καὶ ΕΓ, θὰ εἴχομεν

$$ΕΑ + ΕΓ + ΕΒ > ΑΓ + ΕΒ =$$
$$= ΜΑ + ΜΓ + ΕΜ + ΜΒ > ΜΑ + ΜΓ + ΜΒ$$

καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶχεν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ἀθροίσματος διὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν θὰ ἦτο τὸ ἐλαχίστου ἀθροίσματος.



Σχ. 645.

Θεωρήσωμεν τώρα τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΟ) καὶ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας Α τόξον της (τ) ἐφ' οὗ θὰ κεῖται τὸ σημεῖον Ο κατὰ τὴν προηγουμένην παρατήρησιν. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο ὑπετέθη τὸ ἐλαχίστου ἀθροίσματος, τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι τὸ σημεῖον ἐκεῖνο τοῦ τόξου (τ) διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα ΒΟ + ΓΟ γίνεται ἐλάχιστον. Λέγω ὅτι τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη ΕΟΔ τῆς περιφερείας εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ΒΟ καὶ ΓΟ ἢ διὰ τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ εἶναι ἴσαι.

Πράγματι, διὰ πᾶν ἄλλο σημεῖον Ζ τοῦ τόξου (τ) θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ σχήματος

$$ΒΖ + ΖΓ > ΒΘ + ΘΓ > ΒΟ + ΟΓ$$

Συλλογισμοὶ ὅμοιοι δεικνύουν ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΓ, ΒΟΓ θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν τὸ σημεῖον Ο ἐκεῖνο ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου φαίνονται ὑπὸ γωνίαν 120° ἢ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τόξων (Α, Β, 120°), (Β, Γ, 120°), (Γ, Α, 120°).

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα προετάθη ὑπὸ τοῦ Fermat εἰς τὸν Torricelli, ὅστις καὶ τὸ ἔλυσεν, καθὼς καὶ οἱ Cavalieri καὶ Viviani. (A. Aubry: *Etude élémentaire sur la théorie des maxima et des minima*, σ. 49).

(Βλ. σχετ. *Annales de Gergonne*, tome I, 1810 - 1811, σ. σ. 285, 297, 373 καὶ 375).

Πρόβλημα 302—Ι

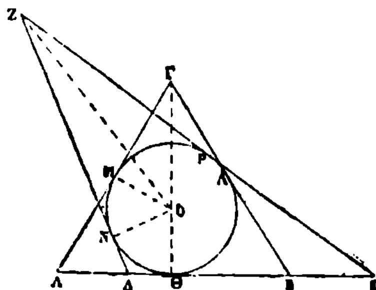
1079 α. **Δύο οἰκισμοὶ Α καὶ Β εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μιᾶς εὐθυγράμμου διώρυγος ΧΥ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις ἑνὸς σημείου Γ τοιούτου, ὥστε εὐθεῖα ὁδὸς ΓΟ, κάθετος ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς διώρυγος, νὰ διέρχεται διὰ σημείου Ο μὲ ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐλάχιστον.**

Οἱ τρεῖς εὐθύγραμμοι δρόμοι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ θὰ συναντῶνται ὑπὸ γωνίας 120°. Ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς διώρυγος γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν 120°· ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ συμπληροῦντος τὴν περιφέρειαν τόξου καὶ ΔΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΥ τέμνουσα τὸ πρῶτον τόξον εἰς Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ εἶναι ἐλάχιστον διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τῆς ΔΟ.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο διηρευνήθη ἀπὸ πάσης ἀπόψεως εἰς ἓν ὡραῖον ἄρθρον τῶν *An. d. Gerg.* (1810 - 11, tome I, σ. 373, Vecten). Βλ. ἐπίσης Housel, *Introduction à la Géométrie Supérieure*, σ. 138 - 144.

Πρόβλημα 303

1080. **Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων βάσιν ὡρισμένου μήκους καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ποῖον τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου;**



Σχ. 648.

Εἰς προηγούμενον πρόβλημα (§ 1060), εἴδομεν, ὅτι ἐκ τῶν τριγώνων τούτων, τὸ ἔχον τὴν μεγίστην γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ. Λέγω ὅτι αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου.

Πράγματι, ἡ περίμετρος τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν ΕΖΔ εἶναι

$$ΕΡ + ΡΖ + ΖΝ + ΝΔ + \\ + ΔΒ = 2(ΖΝ) + 2\,ΑΒ,$$

ἐπειδὴ ΖΝ = ΖΡ, ΕΡ + ΔΝ = ΔΕ = ΑΒ. Γίνεται λοιπὸν ἡ περί-

μετρος ἐλαχίστη διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ τμήματος ΖΝ. Ἀλλ' εἰς τὰ ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς ΟΜ, ΟΝ ἴσας τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΖ, εἶναι γωνία ΟΖΝ < γων. ΟΓΜ, (§ 1060), ἄρα καὶ ΖΝ > ΓΜ.

Τὸ ἰσοσκελὲς ἑπομένως τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου.

1081. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) τρίγωνον εἶναι τὸ ἐλαχίστης περιμέτρου· ἐπειδὴ τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἰσοσκελές, θεωρουμένης ὡς βάσεως οἱασδήποτε πλευρᾶς του.

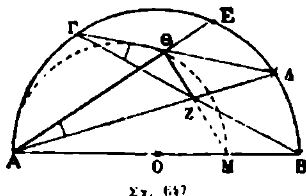
2) Ἐν γένει, ἡ σπουδὴ τῆς ἐλαχίστης ἢ μεγίστης περιμέτρου εἶναι δυσκολωτέρα τῆς διὰ τὰς ἐπιφανείας. Διὰ τοῦτο, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἐκ τῆς μελέτης τῆς μεταβολῆς τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς σχήματος προσπαθοῦμεν νὰ ἀχθῶμεν εἰς συμπεράσματα ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς περιμέτρου του (§ 1694, *Παρατήρησις*).

Προτιμότερος ἐν τούτοις εἶναι ὁ ἀπ' εὐθείας χειρισμὸς τῶν προβλημάτων τούτων καὶ ἀνεξαρτήτως ἐννοιῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ ἑπόμενα Βιβλία τῆς Γεωμετρίας.

Διάφορα ζητήματα

Θεώρημα 304

1082. Ἔστωσαν Α, Β τὰ ἄκρα διαμέτρου ἡμιπεριφερείας, Γ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ ΒΔ, ΔΕ δύο ἴσα τόξα. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΓ, τεμνομένας εἰς Ζ καὶ τὰς ΑΕ, ΓΔ, τεμνομένας εἰς Θ. Δείξατε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ.



Σχ. 617

Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ἐγγράψιμον τὸ τετράπλευρον ΑΓΘΖ καὶ ὀρθὴ ἡ γωνία ΑΓΒ. Ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΘΖ θὰ εἶναι ὀρθή.

Πρόβλημα 305

1083. 1) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα τὰ ἴσον ἀπέχοντα τριῶν εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο. 2) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ εὐθεῖαι αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τριῶν δοθέντων σημείων.

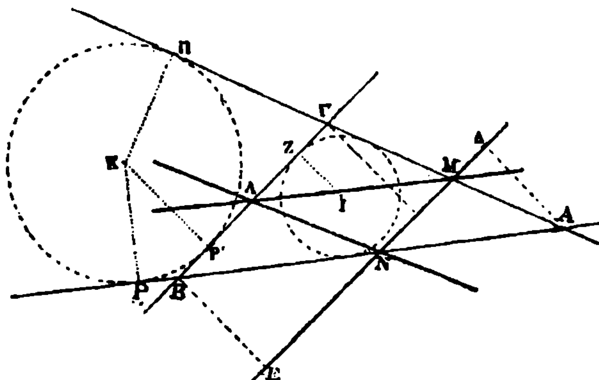
Νὰ μελετηθῇ ἡ, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ, συσχέτισις τῶν δύο αὐτῶν προβλημάτων καὶ τῶν λύσεών των.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν τοῦ πρώτου προβλήματος καὶ ὑποθέσωμεν τὰ ἴδια ὡς τὰ δοθέντα σημεῖα εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα. Ἂς παραστήσωμεν δὲ διὰ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1) Αἱ τομαὶ τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν διχοτόμων τοῦ ΑΒΓ τριγώνου εἶναι τέσσαρα σημεῖα ἀπαντῶντα εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα: Τὸ κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ τρία κέντρα Κ, Κ', Κ'' τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον κύκλων.

2) Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ἑνοῦσαι ἀνὰ δύο τὰ μέσα τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ ἰδίου τριγώνου, ἀπαντοῦν εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα.

Δυαδικότης. Ἂν θεωρήσωμεν θετικὰς τὰς ἀποστάσεις ΚΡ, ΚΠ, ὡς ἐχούσας τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, οἵαν καὶ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τῶν ἰδίων πλευρῶν, καὶ τὴν ἀπόστασιν ΚΡ' ἀρνητικήν, ὡς ἔχουσαν ἀντίθετον διεύθυνσιν πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τῆς ἰδίας πλευρᾶς, δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν τὸ σημεῖον Κ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Ἐπειδὴ καὶ ταύτης αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β, Γ (ἀντιστοίχων τῶν πλευρῶν ΓΑ = β, ΑΒ = γ) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν θετικαὶ ἐνῷ ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (ἀντιστοίχου τῆς πλευρᾶς α) ἀρνητική.



Σχ. 848.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΛΜΝ πρὸς τὰ τρία κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

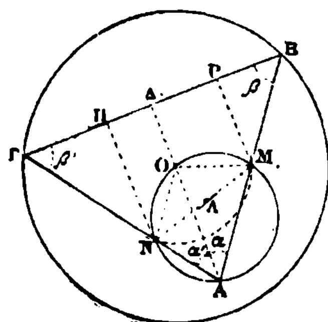
Τὸ κέντρον Ι, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν λογίζονται θετικαί, θὰ συσχετισθῇ πρὸς τὴν ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ οὐδεμία εὐθεῖα εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν δύναται νὰ ἀπέχῃ ἀποστάσεις ἴσας, κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον, ἀπὸ τριῶν σημείων Α, Β, Γ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.

Θεώρημα 306

1084. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μεταβάλλεται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, μία τῶν ἴσων πλευρῶν νὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Μ καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι πάντοτε χορδὴ περιφερείας δοθείσης (Ο). Δείξατε ὅτι καὶ ἡ δευτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (J. M. E., σ. 151, Lauvernay).

Ἔστω ΑΒΓ μία τυχοῦσα θέσις τοῦ τριγώνου καὶ ΑΟΔ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία α εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς σταθερᾶς γωνίας β, εἶναι καὶ αὐτὴ σταθερὰ καὶ ὁ τόπος ἑπομένως τῆς κορυφῆς Α εἶναι τὸ τόξον ΜΑΟ, δεχόμενον

γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν α. Ἀλλ' εἶναι α = α' ἄρα καὶ $\widehat{ON} = \widehat{OM}$ καὶ τὸ σημεῖον Ν, δι' οὗ διέρχεται ἡ ΑΓ, εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τῆς περιφερείας ΟΑΜ, τῆς θέσεως τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Α.



Σχ. 649.

1085. Παρατηρήσεις. 1) Ἡ περιβάλλουσα τῆς βάσεως ΒΓ εἶναι ἔλλειψις, ἔχουσα τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ὡς ἑστίας καὶ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας εἰς δύο σημεῖα (§ 2177).

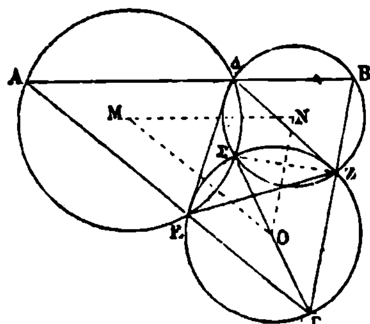
2) Ὁ τόπος τῶν προβολῶν Ρ καὶ Π τῶν σταθερῶν σημείων Μ, Ν ἐπὶ τῆς κινητῆς βάσεως, εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Λ τοῦ τμήματος ΜΝ (§ 1355)· ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΒΡ μένει πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ σημείου Β ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο).

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἁπλοποιημένη διατύπωσις τοῦ 176ου *πορίσματος τοῦ Εὐκλείδου*. Ὁ G. Tarry (*J. M. E.*, 1890, σ. 35 καὶ 83), ὑπέδειξε τὸ πόρισμα τοῦτο, ὡς δυνάμενον νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἀνεύρεσιν πολλῶν ἰδιοτήτων τῶν *σημείων* καὶ *κύκλου τοῦ Brocard*. Ἀργότερον, ὁ Vigarié ἀπέδειξεν τὴν ὀρθότητα τῆς παρατηρήσεως ταύτης.

Τόπος 307

1086. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Δ δύο περιφερειῶν φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΑΔΒ καὶ εἰς τὰ ἄκρα της σχηματίζομεν γωνίας ΔΑΓ, ΔΒΓ δοθείσας. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ;

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι σταθεραί, τὰ τόξα ΔΣΕ καὶ ΔΣΖ εἶναι ἐπίσης σταθερά. Αἱ πλευραὶ ἑπομένως τῆς γωνίας Γ διέρχονται διὰ τῶν σταθερῶν σημείων Ε, Ζ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μέγεθός της εἶναι σταθερόν, ὡς παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος Α + Β, ἕπεται ἀμέσως ὅτι ἡ κορυφή της Γ γράφει τὸ τόξον (Ε, Ζ, 180° − (Α + Β)).



Σχ. 650.

1087 Παρατηρήσεις. 1) Ἡ περιφέρεια ΕΓΖ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ· ἐπειδὴ γων. ΕΣΖ = 360° − ΔΣΕ − − ΔΣΖ, δηλ. εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Γ.

2) Τὸ μέγιστον τρίγωνον ΑΔΒ λαμβάνεται διὰ θέσιν τῆς ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον ΜΝ (ὡς εἰς τὸ σχῆμα), ὁπότε καὶ τὸ μέγεθός της γίνεται μέγιστον, ΑΒ = 2ΜΝ. Τὸ ἐλάχιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς θέσιν ΔΣ τῆς

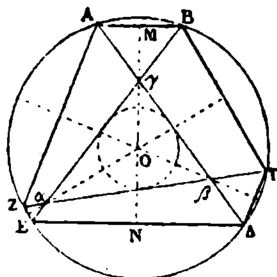
ΑΒ κάθετον πρὸς τὴν διάκεντρον, ὁπότε τὸ τρίγωνον περιορίζεται εἰς τὸ σημεῖον Σ.

3) Ἡ διάμετρος ΣΓ τῆς περιφερείας (Ο) ὁρίζεται ὑπὸ τῶν θέσεων Γ καὶ Σ, ἀντιστοίχων τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου ΑΒΓ

Θεώρημα 308

1088. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραί του παράλληλοι ἀνὰ δύο, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν. (*Catalan, Mathesis,* 1890, σ. 94).

Ἔστωσαν α, β, γ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἴσων διαγωνίων ἀνὰ δύο. Τὸ σχῆμα ΑΒΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἀφοῦ αἱ ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΕ ἴσαι. Ἡ δὲ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑγΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΔΕ εἰς τὰ μέσα των Μ, Ν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αβγ. Εἶναι λοιπὸν τὸ σημεῖον Ο κοινὸν τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου καὶ κατ' ἀκολουθίαν κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν κορυφῶν του.



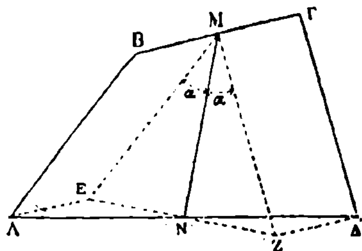
Σχ. 651.

1089. Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι τὸ ἀντίστροφον ἑνὸς γνωστοῦ θεωρήματος (Catalan, *Théorèmes et Problèmes*, 6e ἐκδ. σ. 132, Θεωρ. LXV).

Θεώρημα 309

1090. Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχῃ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας: 1) Αὗται εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα Μ, Ν, τῶν ἄλλων πλευρῶν εὐθεῖαν. 2) Αἱ προβολαί των ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΝ εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ τμῆμα ΜΝ (Catalan, Mathesis, 1885, σ. 154).

Σχηματίσωμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΜΕ, ΔΓΜΖ καὶ συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Ν μετὰ τῶν Ε καὶ Ζ. Θὰ ἔχωμεν ΜΕ = ΜΖ, τὰ δὲ τμήματα ΝΕ, ΝΖ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΝΑΕ καὶ ΝΔΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ἴσας γωνίας Α καὶ Δ περιεχομένας μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, καὶ ἐπομένως ΝΕ = ΝΖ, γων. ΑΝΕ = γων. ΔΝΖ.



Σχ. 652.

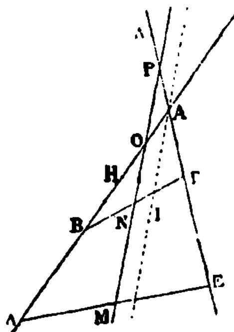
Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΜΖ, ἡ εὐθεῖα ΜΝ, οὖσα διάμεσος ἐπὶ τὴν βάσιν, εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν. Εἶναι συνεπῶς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσον κεκλιμέναι πρὸς

τὴν ΜΝ καὶ ἔχουν προβολὰς ἐπ' αὐτὴν τὰς αὐτὰς μετὰ τῶν ΜΕ καὶ ΜΖ, δηλ. τὸ τμῆμα ΜΝ.

Τόπος 310

1091. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἴσα μήκη ΒΔ, ΓΕ· ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθειῶν ΔΕ; (Catalan, Mathesis, 1885, σ. 222).

Ἡ διάμεσος ΜΝ τοῦ τετραπλεύρου ΔΒΓΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τῶν πλευρῶν ΒΔ, ΓΕ (§ 1090). Ἐπομένως, ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΒΓ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α.



Σχ. 653

Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο, μέσου τοῦ τμήματος ΑΗ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΑ τὴν μικροτέραν ΓΑ = ΒΗ.

1091 α. ***Σημείωσις.*** Ἡ εὐθεῖα ΜΝΟ εἶναι ἡ *εὐθεῖα τῶν μέσων* κατὰ τὸν Chasles, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς γωνίας Α, ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὰ ἴσα μήκη ΒΗ = ΑΓ, ΒΔ = ΓΕ, κλπ., δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα (§ 771, β).

Θεώρημα 311

1092. 1) Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς ἰσοῦται πρὸς τὴν προέκτασιν μέχρι τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ταύτην ὕψους.

2) Ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

1) Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ΡΗ = ΡΛ (Σχ. 654). Βλ. *Μέθοδοι*, § 292, γ. Εἶναι ἄλλωστε γων. α = β, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των καθέτους καὶ α = γ, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου· ἐπομένως β = γ καὶ ΡΗ = ΡΛ.

2) Τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΟΗ καὶ τὸ σημεῖον Δ, μέσον τοῦ ΑΗ, ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον τοῦ Euler. Συνεπῶς

ΟΕ = ΔΗ = ΑΔ.

Θεώρημα 311—Ι

1093. 1) Αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς δοθὲν τρίγωνον καὶ εἰς τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα κορυφὰς τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ δοθέντος καὶ δύο ἄλλας κορυφὰς κοινὰς μετ' αὐτοῦ, εἶναι ἴσαι. (Carnot).

2) Τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν τριῶν ἀνωτέρω περιφερειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικὸν καὶ ἔχει τὸν αὐτὸν κύκλον τῶν ἐννέα σημείων μετ' αὐτοῦ.

3) Τὸ ἀντισυμπληρωματικὸν (anticomplémentaire) τρίγωνον τοῦ δο-

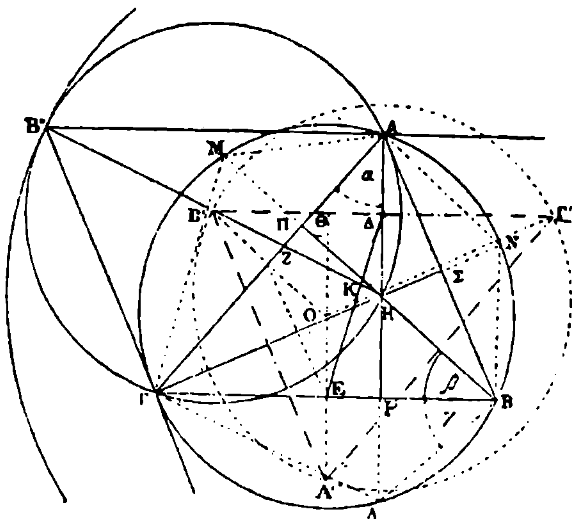
θέντος (δηλ. τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον ὡς πλευρὰς τὰς ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ), ἔχει ὡς κέντρον περιγεγραμμένης περιφερείας τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ ἡ περιφέρεια αὕτη ἐφάπτεται τῶν τριῶν προηγουμένων περιφερειῶν.

1) Δυνάμεθα νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὰς *Μεθόδους*, § 292, ε· ἀρκεῖ ἄλλωστε νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰ ἴσα τρίγωνα ΓΗΒ, ΓΛΒ (Σχ. 654) θὰ ἔχουν καὶ ἴσας περιγεγραμμένας περιφερείας. *Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον* ΓΗΒ *εἶναι συμμετρική*, ὡς πρὸς τὴν ΒΓ, *τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ* ΓΛΒ, δηλ. τῆς εἰς τὸ ΑΒΓ.

2) Τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', συμμετρικὰ τοῦ κέντρου Ο πρὸς τὰς πλευράς, εἶναι ἀντίστοιχα κέντρα τῶν τριῶν συμμετρικῶν περιφερειῶν, ὡς ἡ ΓΗΑ. Ἀλλὰ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Α'Β' καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἡ Α'Β' συνεπῶς εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Τὸ κέντρον Κ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ'.

Τὰ ἴσα ταῦτα τρίγωνα ἔχουν τὸν αὐτὸν κύκλον τῶν ἐννέα σημείων.



Σχ. 654

3) Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' καὶ ἑπομένως καὶ τὴν ἀλήθειαν τῆς 3ης προτάσεως. Γνωρίζομεν ἄλλωστε, ὅτι τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ἀντισυμπληρωματικοῦ τριγώνου Α''Β''Γ'' τοῦ δοθέντος (§ 445), καὶ ἑπομένως τὸ Η εἶναι κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ Α''Β''Γ'', ὡς καὶ τῆς εἰς τὸ Α'Β'Γ'. Οἱ κύκλοι μὲ κέντρα ἀντίστοιχα Η καὶ Β' ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Β''.

Θεώρημα 312

1094. 1) Ἐκ σημείου Η φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου καὶ λαμβάνομεν τὰς συμμετρικὰς αὐτῶν ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Αἱ οὕτω ὁριζόμεναι ἐννέα εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ τρεῖς κατὰ τέσσαρα σημεῖα (τοῦ Η συμπεριλαμβανομένου εἰς αὐτά).

2) Ἐὰν τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, τὰ τρία ἄλλα σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

1) Ἔστωσαν HP_α, HP_β, HP_γ, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς α, β, γ καὶ H_α, H_β, H_γ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ Η ὡς πρὸς τὰς ἰδίας πλευράς.

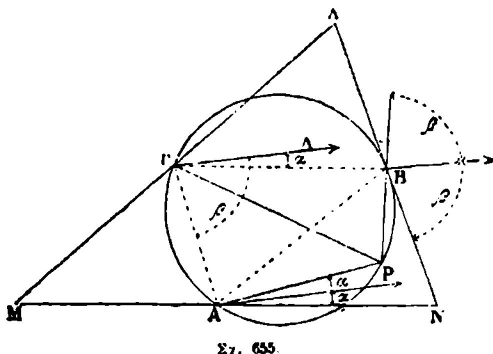
Αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι τῶν HP_α καὶ HP_γ ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν α διέρχονται διὰ τοῦ σημείου H_α. Ἑπομένως αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι καὶ ἡ HH_α διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἄλλας πλευράς.

2) Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας (§ 666). Ὥστε...

Θεώρημα 312—Ι

1095. Διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν δοθέντος τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ λαμβάνομεν τὰς συμμετρικὰς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ὡς πρὸς τὰς εὐθείας αὐτὰς ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὗται εὐθεῖαι τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ δοθέντος τριγώνου. (E. Lemoine, J. M. E., 1880 σ. 24, ζήτ. 305).

Ἔστω ΛΜΝ τὸ δοθὲν τρίγωνον, ΑΒΓ τὸ τρίγωνον τῶν μέσων, ΓΔ ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις, σχηματίζουσα γωνίας α καὶ β μετὰ τῶν τῶν πλευρῶν ΜΝ καὶ ΛΝ.



Σχ. 655

Ἔστωσαν ΑΡ, ΒΡ αἱ συμμετρικαὶ τῶν ΜΝ, ΛΝ· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Ρ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ ἢ ὅτι ἡ γωνία ΑΡΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΑΓΒ ἢ Ν.

Ἔχομεν γωνία $BAP = M - 2\alpha$

$$ABP = \Lambda - PBN = \Lambda - (180^\circ - 2\beta) = \Lambda + 2\beta - 180^\circ,$$

συνεπῶς $\quad ΑΡΒ = 180^\circ - (Μ - 2α + Λ + 2β - 180^\circ).$

'Αλλὰ $\quad Μ + Λ - 180^\circ = -Ν \quad$ καὶ $2(β - α) = 2Ν$·

ἐπομένως $\quad ΑΡΒ = 180^\circ - Ν.$

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἑπόμενον:

Δι' ἑκάστης κορυφῆς τριγώνου ΑΒΓ *φέρομεν εὐθεῖαν συμμετρικὴν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ὡς πρὸς ὡρισμένην καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε διεύθυνσιν* (ε). *Αἱ τρεῖς οὕτω ὁριζόμεναι εὐθεῖαι τέμνονται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον.*

2) *Ἐὰν ἐκτελέσωμεν διαδοχικῶς τὰς ὡς ἄνω συμμετρίας διὰ δύο διευθύνσεις* (ε), (ε'), *σχηματιζούσας πρὸς ἀλλήλας γωνίαν* 45°, *λαμβάνομεν ὡς ἀντίστοιχα σημεῖα τομῆς τῶν δύο τριάδων εὐθειῶν δύο συμμετρικὰ σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Ἐπειδὴ ἀνὰ δύο αἱ εὐθεῖαι* ΑΡ, ΑΡ' *κλπ., θὰ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.*

3) Ἀντίστροφον Θεώρημα. *Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου μεθ' ἑνὸς σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι συμμετρικαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν.*

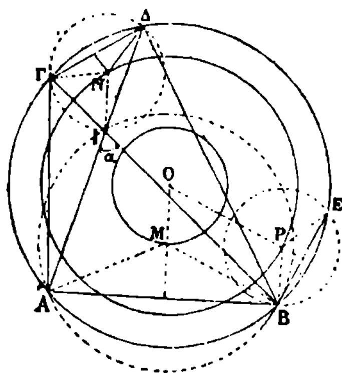
Τόπος 312—II

1096. Τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν, δύο ἀπέναντι πλευραὶ μεταβάλλουσιν θέσιν διατηροῦσαι τὰ μήκη των.

1) *Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα μὲ βάσεις τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων;*

2) *Δείξατε, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ τόπου διὰ τὸ ἓν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἄλλο τρίγωνον.*

3) *Ὅμοιον ζήτημα, διὰ τὰ τρίγωνα μὲ βάσεις τὰς ἰδίας καὶ κορυφὴν κοινὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.*



Σχ. 656.

1) Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ αἱ σταθερῶν μηκῶν πλευραί, Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων, Μ, Ν τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν ΑΙΒ, ΓΙΔ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία α εἶναι σταθερά, ὡς μετρουμένη ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΓΔ, ἑκάστη τῶν θεωρουμένων περιφερειῶν ἔχει σταθερὰν ἀκτῖνα, ὡς περιγεγραμμένη εἰς τρίγωνον μὲ σταθερὰν βάσιν καὶ σταθερὰν τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν. Εἶναι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΜΒ, ΓΝΔ ἀμετάβλητα κατὰ μέγεθος καὶ ἐπομένως αἱ κορυφαὶ των Μ, Ν γράφουν δύο περιφερείας ὁμοκέντρους τῆς δοθείσης καὶ μὲ ἀκτῖνας ΟΜ, ΟΝ, ἀντιστοίχως.

2) Ἐὰν λάβωμεν ΒΕ = ΓΔ καὶ μεταφέρωμεν τὴν περιφέρειαν (Ν) εἰς τὴν θέσιν (Ρ), παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΕ ἰσοῦται

πρὸς 180° — α καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΜΒΑ, ΡΒΕ ἴση πρὸς 90°—α. Εἶναι συνεπῶς τὸ τμῆμα ΡΒ κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ, τὸ ΜΒ κάθετον ἐπὶ τὸ ΒΕ καὶ τὸ σχῆμα ΟΜΒΡ παραλληλόγραμμον. Κατ' ἀκολουθίαν ΟΜ = ΡΒ = ΙΜ, ΟΡ = ΜΒ = ΙΜ.

3) Ἔστω Κ ἡ τομὴ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ Κ εἶναι σταθερά, ὡς μετρουμένη ὑπὸ τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΓΔ, ὅμοιοι πρὸς τοὺς προηγουμένους συλλογισμοί μᾶς πείθουν ὅτι οἱ τόποι τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν (ΑΚΒ), (ΓΚΔ) εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι τῆς δοθείσης, καθὼς καὶ ὅτι ἡ ἀκτὶς ἑκάστης τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ἕτερον τρίγωνον περιφερείας (J.M.E., 1889, σ. 239 καὶ 1891, σ. 237).

Σημεῖα τοῦ Brocard 312—III

1097. Ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, γράφομεν τόξα δεχόμενα γωνίας ἴσας πρὸς τὰς παραπληρωματικὰς τῶν γωνιῶν Β, Γ, Α ἀντιστοίχως. Δείξατε, ὅτι τὰ τρία ταῦτα τόξα ἔχουν κοινὸν σημεῖον Μ καὶ ὅτι αἱ γωνίαι ΜΑΓ, ΜΓΒ, ΜΒΑ εἶναι ἴσαι.

(Βλ. § 906). Ὑπάρχουν δύο σημεῖα Μ· ὀνομάζονται *σημεῖα τοῦ Brocard* καὶ συμβολίζονται συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων ω, ω'. Τὰ τόξα (Β, Γ, π — Β), (Γ, Α, π — Γ), (Α, Β, π — Α), ἐφάπτονται ἕκαστον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου· αἱ περιφέρειαι εἰς ἣν ἀνήκουν ὀνομάζονται ἐπισυνημμέναι περιφέρειαι.

Θεώρημα 312—IV

1098. Αἱ συμμετρικαὶ περιφέρειαι τῶν ἐπισυνημμένων περιφερειῶν, τῶν τεμνομένων κατὰ τὸ ἓν τῶν σημείων Brocard ω, ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς συμμετρικὰς τῶν τριῶν ἄλλων ἐπισυνημμένων περιφερειῶν.

Ἔστωσαν 1, 3, 5 τὰ κέντρα τῶν τριῶν περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου ω· τὰ σημεῖα 1', 3', 5', συμμετρικὰ τῶν 1, 3, 5 ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, εἶναι τὰ κέντρα τῶν συμμετρικῶν περιφερειῶν τῆς ἐκφωνήσεως.

Ἔστω Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν (1'), (3')· ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον αὐτὸ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (5').

Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΔΓ τῆς περιφερείας (1') εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΒωΓ, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς αὐτὸ ΒΔΓ = ΒωΓ = π — Β καὶ ἑπομένως γων. ΒΙΓ = Β. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον γων. ΓΙΑ = Γ καὶ συνεπῶς γων. ΑΙΒ = Β + Γ = π — Α.

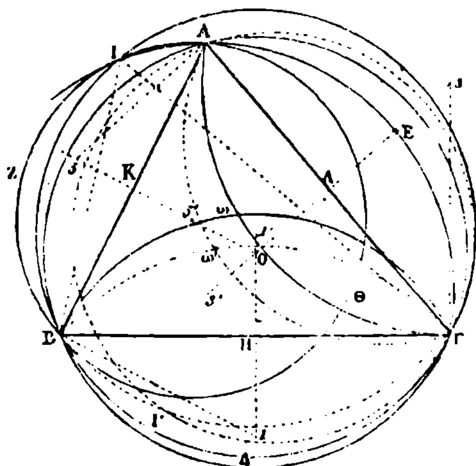
Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΖΒ τῆς περιφερείας (5'), συμμετρικὸν ὂν τοῦ τόξου ΑωΒ, ἔχει ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς αὐτὸ ἴσην πρὸς π—Α, δηλ. πρὸς τὴν γωνίαν ΑΙΒ· διέρχεται ἑπομένως διὰ τοῦ σημείου Ι.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς συμμετρικὰς τῶν ἐπισυνημμένων περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ἄλλου σημείου ω'. Τέμνονται καὶ αὗται εἰς ἓν δεύτερον σημεῖον Ι'.

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα J, Ι' εἶναι τὰ σταθερὰ κέντρα ὁμοιότητος δύο, περιγεγραμμένων καὶ ὁμοίων πρὸς τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον, τριγώνων. (Βλ. ἐπμ. § 2487).

1099. Σημείωσις. Ἡ σπουδὴ τῶν συμμετρικῶν τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων ἑκάστης διὰ δύο κορυφῶν ἑνὸς ἀρχικοῦ τριγώ-

νου (τριγώνου ἀναγωγῆς=référence), ἤγαγεν εἰς ἓν νέου εἴδους μετασχηματισμόν. Ἐπειδὴ εἰς τρεῖς περιφερείας, διερχομένας (ἀνὰ μία) διὰ δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ διά τινος ἄλλου σημείου Μ, ἀντιστοιχοῦν τρεῖς συμμετρικοὶ αὐτῶν περιφέρειαι ἔχουσαι



Σχ. 857.

ἐπίσης κοινὸν σημεῖον Μ'. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται *δίδυμα σημεῖα*.

Τὸν μετασχηματισμὸν διὰ τῶν συμμετρικῶν περιφερειῶν ἐμελέτησεν ὁ Schoute.

Ὡς ἀξιοσημείωτον εἰδικὴν περίπτωσιν, ἀναφέρομεν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν. Αἱ συμμετρικαὶ αὐτῆς ὡς πρὸς ἑκάστην πλευρὰν διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου (§ 1093).

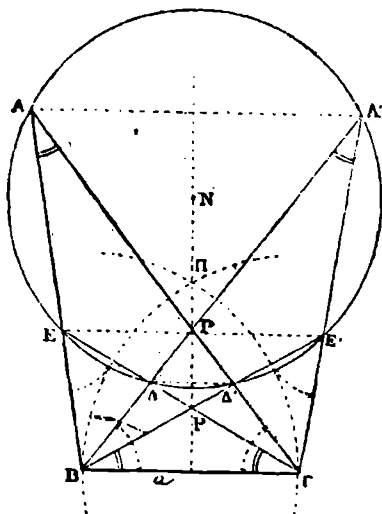
Περιφέρεια τοῦ Neuberg 312—V

1100. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγωγῆς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τριγώνου τούτου, κατασκευάζομεν τρίγωνα ἰσογώνια πρὸς ἓν ἄλλο δοθὲν ΑΒΓ. Ἑκάστη ὁμὰς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ ἀπέναντι τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ κορυφαὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἀντιστοιχεῖ τὸ συμμετρικὸν Α'ΒΓ, ὡς πρὸς τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς βάσεως εὐθεῖαν. Εἰς τὰ τρίγωνα ΒΓΕ, ΒΓΔ, ἀκολούθως, ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ (καὶ κατὰ τὴν ἀντιστοίχισιν γωνιῶν τὴν ὑποδεικνυομένην ὑπὸ τοῦ σχήματος) ἀντιστοιχοῦν τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ΒΓΕ', ΒΓΔ'.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ ἓξ σημεῖα Α, Α', Δ, Δ', Ε, Ε' ἀνήκουν εἰς μίαν περιφέρειαν, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια ἥτις διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ συμμετρικοῦ

τραπεζίου ΑΑ'Ε'Ε, διέρχεται καὶ διὰ τῆς κορυφῆς Δ, ἢ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΔΑ' εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 638.

Τοῦτο εἶναι ἀληθές, ἀφοῦ

γων. ΒΑΑ' = π − ΑΒΓ,

ἐκ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΑ', καὶ

γων. ΒΔΓ = ΕΒΓ = ΑΒΓ,

ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΕΒΓ καὶ ΒΔΓ τριγώνων.

1100 α. Σημείωσις. 1) Τὰ ἐξ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνίαν ω τοῦ Brocard καὶ ἐκλήθησαν *équi-brocardiens* τρίγωνα. Ἡ περιφέρεια ΑΕΔ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ Neuberg, ἡ σχετικὴ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ *τριγώνου ἀναγωγῆς*.

Εἰς διάφορα ἄρθρα τοῦ Vigarié εἰς *Journal d. Math. Élémentaires*, ὑποδεικνύονται αἱ σημαντικώτεραι ἰδιότητες τῶν *κύκλων τοῦ Neuberg* (1887, σ. 121, 145 καὶ 169).

2) Εἰς πᾶν τρίγωνον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἕνα ἀρκετὰ μέγα ἀριθμὸν περιφερειῶν ἀξιοσημειώτων διὰ τὰς ἰδιότητάς των. Ἰδοὺ μερικαὶ ἐξ αὐτῶν:

Περιγεγραμμένη.

Ἐγγεγραμμένη καὶ παρεγγεγραμμέναι.

Περιφέρεια τοῦ Adams (§ 2393).

Περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων ἢ τοῦ *Euler* ἢ τοῦ Feuerbach (§ 27).

Ἐπισυνημμέναι περιφέρειαι, πρὸς ὁρισμὸν τῶν σημείων τοῦ *Brocard* (§ 1097).

Περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου, αἱ ἔχουσαι διάμετρον ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τὴν ἀπόστασιν τῶν ποδῶν ἐπ' αὐτῆς τῶν δύο διχοτόμων τῆς ἀπέναντι γωνίας.

Περιφέρεια τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου (§ 1154).

Περιφέρεια τῶν ἴσων ῥοπῶν ἢ *τῶν ὀκτὼ σημείων* (§§ 2410 καὶ 2412).

Περιφέρειαι τοῦ Lemoine (§ 2375 καὶ ἑπμ.).

Περιφέρειαι τοῦ Tucker (§ 2383).

Περιφέρεια τοῦ Taylor (§ 2391).

Περιφέρεια τοῦ Brocard (§ 2428).

Περιφέρειαι τοῦ Neuberg (§ 1100).

Περιφέρεια τοῦ Longchamps (*J. M. S.*, 1886, σ. 57 π° 84 καὶ *A. F.*, 1897, σ. 136).

Περιφέρειαι τοῦ Fuhrmann, ἡ ἔχουσα διάμετρον τὴν ἀπόστασιν Ην τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπὸ τοῦ σημείου ν τοῦ *Nagel* (*Mathesis*, 1890, σ. 105).

Περιφέρεια τοῦ M'Cay (*J. M. S.*, σ. 56, n° 91).
Περιφέρεια τοῦ Schoute (*J. M. S.*, σ. 57, n° 93).
Περιφέρεια GH ἢ ὀρθοκεντροειδὴς (orthocenroïdal) (*Math.*, 1890, σ. 166 καὶ 1893, σ. 33).

Εἰς τὸ *J. d. Math. Spéciales* τῶν ἐτῶν 1888 καὶ 1889 ὑπάρχει μία πολὺ ἐνδιαφέρουσα μελέτη τοῦ Vigarié ἐπὶ τῶν σημείων, εὐθειῶν, περιφερειῶν καὶ ἄλλων ἀξιοσημειώτων καμπύλων ἐκ τῶν ὁριζομένων εἰς πᾶν τρίγωνον.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τῆς § 529 ὑπόκειται εἰς ἐξαιρέσεις.

Ὁ *J. N. Visschers* εἰς τὸ περιοδικὸν *Der Vriend der Wishunde* διετύπωσε τὸ ἀκόλουθον θεώρημα:

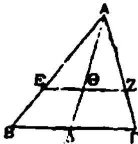
Δύο πολύγωνα, ἔχοντα πλευρὰς περισσοτέρας τῶν τεσσάρων, δύνανται νὰ ἔχουν ν ἀντιστοίχους πλευρὰς ἴσας καὶ ν ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας, χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

ΒΙΒΛΙΟΝ III

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα

Θεώρημα 313

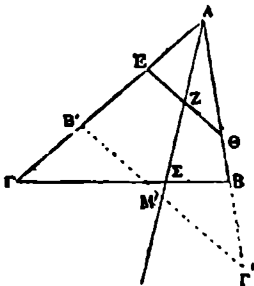


Σχ. 659.

1101. Τὸ μεταξὺ δύο πλευρῶν τριγώνου τμῆμα παραλλήλου εὐθείας πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ ἔχει τὸ μέσον του ἐπὶ τῆς πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην διαμέσου τοῦ τριγώνου.

Πράγματι, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ σχηματίζουν δέσμην διαιροῦσαν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ παράλληλα τμήματα ΒΓ καὶ ΕΖ· καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα ἴσα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὴν εὐθεῖα ΕΖ.

Θεώρημα 313—1



Σχ. 660.

1102. Τὸ μεταξὺ δύο πλευρῶν τριγώνου τμῆμα ἀντιπαραλλήλου εὐθείας πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ἔχει τὸ μέσον του ἐπὶ τῆς πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην ἀντιστοιχούσης συμμετροδιαμέσου τοῦ τριγώνου.

Ἡ συμμετροδιάμεσος ΑΣ εἶναι συμμετρικὴ τῆς διαμέσου πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α (§ 148). Διὰ τὴν κατασκευήν της, λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ' = ΑΒ, ΑΓ' = ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ' τοῦ ΑΒ'Γ' τριγώνου. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μέσον Ζ παντὸς ἀντιπαραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ τμήματος ΕΘ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΣ.

Θεώρημα 314

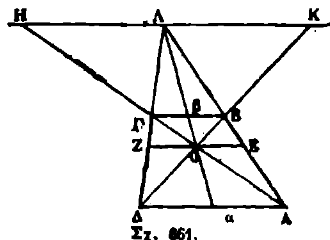
1103. Ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ἀγομένη διὰ τῶν μέσων τῶν βάσεων τραπεζίου, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ὡς καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Θεώρημα 315

1104. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τραπεζίου διαιρεῖ αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν βάσεων.

Τὰ τρίγωνα ΓΟΒ, ΑΟΔ εἶναι ἰσογώνια· ἐπομένως:

$$\frac{ΒΟ}{ΟΔ}=\frac{ΓΟ}{ΟΑ}=\frac{ΒΓ}{ΑΔ}=\frac{β}{α}.$$



Σχ. 661.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\frac{ΓΟ}{ΓΑ}=\frac{β}{α+β}.$$

Πόρισμα. Ἐκ τῆς παραλλήλου ΖΟΕ, λαμβάνομεν ἐπίσης:

$$\frac{ΒΕ}{ΒΑ}=\frac{β}{α+β}, \text{ ὅθεν } ΒΕ=ΑΒ.\frac{β}{α+β} \text{ καὶ } ΑΕ=ΑΒ.\frac{α}{α+β}.$$

Θεώρημα 315—I

1105. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου διαιρεῖ αὐτὰς ἐξωτερικῶς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν βάσεων.

Ἔχομεν (Σχ. 661): $\frac{ΛΒ}{ΛΑ}=\frac{β}{α}$ ἢ $\frac{ΛΑ}{ΛΒ}=\frac{α}{β}$.

Ἐπίσης: $$\frac{ΛΑ-ΛΒ}{ΛΒ}=\frac{ΑΒ}{ΛΒ}=\frac{α-β}{β}.$$

ὅθεν $$ΛΒ=ΑΒ.\frac{β}{α-β},$$

$$ΛΑ=ΑΒ.\frac{α}{α-β}.$$

Πόρισμα. Θὰ ἔχωμεν ἐπίσης:

$$\frac{ΗΓ}{ΗΑ}=\frac{β}{α}$$

Θεώρημα 315—II

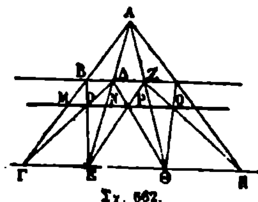
1106. Εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ σχηματίζομεν τραπέζια φέροντες παραλλήλους ΔΕ, ΖΘ... πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων τούτων τέμνονται ἐπὶ τῆς πρὸς τὴν βάσιν διαμέσου τοῦ τριγώνου.

Θεώρημα 315—III

1107. Ἐκ σημείου Α φέρομεν τεμνούσας δύο παραλλήλων εὐθειῶν· δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν οὕτω σχηματιζομένων διαφόρων τραπεζίων εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Δι' ἑνὸς ἐκ τῶν σημείων τούτων Ο φέρομεν εὐθεῖαν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΔΝ}{ΝΕ}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}.$$ (§ 1104, πόρισμα).



Σχ. 662.

'Αλλ' εἶναι $\frac{ΒΔ}{ΓΕ}=\frac{ΔΖ}{ΕΘ}$· ἡ παράλληλος ἐπομένως πρὸς τὰς εὐθείας ἡ ἀγομένη διὰ τοῦ σημείου Ρ, διέρχεται διὰ τοῦ Ν καὶ συμπίπτει ἄρα πρὸς τὴν ΜΝ. Ἤτοι τὰ διάφορα σημεῖα Ο, Ρ, Π..., εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

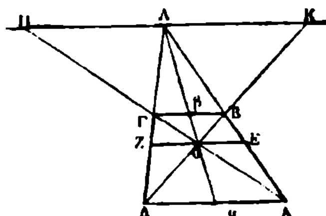
1108· Ἀντίστροφον θεώρημα. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι, ΒΖ, ΜΠ, ΓΘ (Σχ. 662). Δι' ἑκάστου σημείου Ο τῆς ΜΠ φέρομεν δύο εὐθείας, ὡς τὰς ΒΟΕ καὶ ΔΟΓ· δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΒ, ΕΔ, ΘΖ κλπ. διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Θεώρημα 316

1109. Εἰς πᾶν τραπέζιον, ἡ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τέμνεται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κατὰ τμῆμα ἔχον ὡς μέσον τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐπειδή : $$\frac{ΕΟ}{ΒΓ}=\frac{ΑΟ}{ΑΓ} \quad ἢ \quad \frac{ΕΟ}{β}=\frac{α}{α+β} \quad (§\ 1104)$$

καὶ $$ΕΟ=\frac{αβ}{α+β}.$$



Σχ. 663.

Ὁμοίως $$ΖΟ=\frac{αβ}{α+β} \quad ἢ \quad ΖΟ=ΕΟ.$$

Ἄλλαι ἀποδείξεις.

1) Ἔχομεν $$\frac{ΟΖ}{β}=\frac{ΔΟ}{ΔΒ}=\frac{ΑΟ}{ΑΓ}=\frac{ΟΕ}{β}.$$

Ἄρα $$ΟΖ=ΟΕ.$$

2) Ἐπειδὴ ἡ δέσμη Λ (ΔΟΒΚ) εἶναι ἁρμονική, ἡ ΖΟΕ οὖσα παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΛΚ, θὰ διαιρεῖται εἰς ἴσα τμήματα ὑπὸ τῶν τριῶν ἄλλων ἀκτίνων.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΖΕ εἶναι λ ἔχομεν, τὴν σχέσιν

$$\frac{2}{λ}=\frac{1}{ΕΟ}=\frac{α+β}{αβ}=\frac{β}{αβ}+\frac{α}{αβ}=\frac{1}{α}+\frac{1}{β}.$$

Θεώρημα 316—I

1110. Εἰς πᾶν τραπέζιον, ἡ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, τέμνεται ὑπὸ τῶν προεκτάσεων τῶν διαγωνίων κατὰ τμῆμα ἔχον μέσον τὸ σημεῖον αὐτό.

$$\mathrm{ΛΗ} = \frac{αβ}{α-β} = \mathrm{ΛΚ}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν λ' εἶναι τὸ μῆκος τῆς ΗΚ,

$$\frac{2}{λ'} = \frac{1}{β} - \frac{1}{α}.$$

Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς σχέσεως ταύτης καὶ τοῦ προηγουμένως εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{λ} + \frac{1}{λ'} = \frac{1}{β} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{λ} - \frac{1}{λ'} = \frac{1}{α}.$$

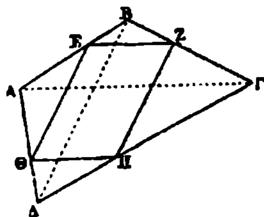
Θεώρημα 316—II

1111. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ διαιροῦμεν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{μ}{ν}$, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων κορυφῶν Α καὶ Γ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα διαιρέσεως εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Ἐπειδὴ

$$\frac{\mathrm{ΑΕ}}{\mathrm{ΕΒ}} = \frac{\mathrm{ΑΘ}}{\mathrm{ΘΔ}} = \frac{μ}{ν},$$

ἡ εὐθεῖα ΕΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς καὶ ἡ ΖΗ· εἶναι λοιπὸν αἱ ΕΘ καὶ ΖΗ παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΕΖ, ΘΗ, καὶ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμον.



Σχ. 604.

Παρατηρήσεις. 1) Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει καὶ τὸ στρεβλὸν τετράπλευρον.

2) Τὸ θεώρημα τῆς παραγράφου 542 εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω 1111.

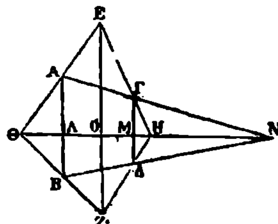
Θεώρημα 317

1112. Ἐὰν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν μίαν τῶν δύο γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΕΗΖΘ, αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου.

Ἐπειδὴ

$$\frac{\mathrm{ΑΛ}}{\mathrm{ΒΛ}} = \frac{\mathrm{ΕΟ}}{\mathrm{ΖΟ}} = \frac{\mathrm{ΓΜ}}{\mathrm{ΔΜ}}.$$

Αἱ τέμνουσαι, ἑπομένως, ΑΓ, ΛΜ, ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 605.

1112 α. Ἀντίστροφον Θεώρημα. Συνδέομεν ἓν τυχὸν σημεῖον Ν τῆς μιᾶς διαγωνίου ΘΗ μετὰ τῶν σημείων Α, Β

μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν δευτέραν διαγώνιον, δι' εὐθειῶν τεμνουσῶν τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Γ καὶ Δ. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ.

Θεώρημα 318

1113. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας καὶ δύο ἄλλας παραπληρωματικάς, αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

(*Μέθοδοι*, § 150).

Θεώρημα 319

1114. Ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον ΡΜΝ πρὸς τὴν διάμεσον ἐκ τῆς κορυφῆς Α, τέμνουσαν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα ΡΜ + ΡΝ εἶναι σταθερόν.

(*Μέθοδοι*, § 266).

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Ρ, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ ἓν τῶν μηκῶν ΡΜ, ΡΝ πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς ἀρνητικὸς ἀριθμός.

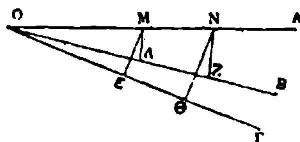
Θεώρημα 319—I

1115. Ἐκ σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου εὑρισκομένου, φέρομεν εὐθύγραμμα τμήματα μέχρι τῶν πλευρῶν καὶ συναντῶντα αὐτὰ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων τμημάτων εἶναι σταθερόν.

(*Μέθοδοι*, § 289 α).

Θεώρημα 319—II

1116. Τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Δείξατε, ὅτι ἐὰν ἓν σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν ἔχουν σταθερὸν λόγον.



Σχ. 668.

Ἂς εἶναι Μ, Ν δύο τυχοῦσαι θέσεις τοῦ κινητοῦ σημείου.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{ΜΔ}{ΜΕ} = \frac{ΝΖ}{ΝΘ}.$$

1117. Ἀντίστροφον θεώρημα. Ἐὰν ἓν τρίγωνον ΜΔΕ μεταβάλλεται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, δύο κορυφαί του νὰ γράφουν δοθείσας εὐθείας καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραί των, ὡς αἱ ΝΘ, ΜΕ, νὰ μένουν πάντοτε παράλληλοι, ἡ τρίτη κορυφὴ αὐτοῦ γράφει εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο πρώτων.

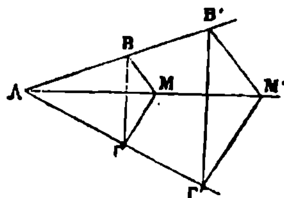
Θεώρημα 319—III

1117 α. Ἔστω γωνία Α καὶ παράλληλα τμήματα ΒΓ, Β'Γ'... μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Δείξατε ὅτι αἱ ἐκ τῶν Β, Β'... καὶ Γ, Γ'... ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς δύο τυχούσας ἀντιστοίχως διευθύνσεις, τέμνονται εἰς σημεῖα Μ, Μ'... κείμενα ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς Α.

Φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Β΄ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΜ, τέμνουσαν τὴν ΑΜ εἰς Μ΄. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ Γ΄Μ΄ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΜ.

Ἔχομεν

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{BM}{B'M'},$$



Σχ. 667.

καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ τρίγωνα ΓΒΜ, Γ΄Β΄Μ΄ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μία γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, καὶ αἱ πλευραὶ ΓΜ, Γ΄Μ΄ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν ἀπ᾽ εὐθείας τὰς Β΄Μ΄, Γ΄Μ΄ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΜ, ΓΜ, ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α.

1117 β. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ θεώρημα τοῦτο χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀγωγήν, ἐκδοθέντος σημείου Μ, εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τομῆς δύο ἄλλων, τεμνομένων ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως.

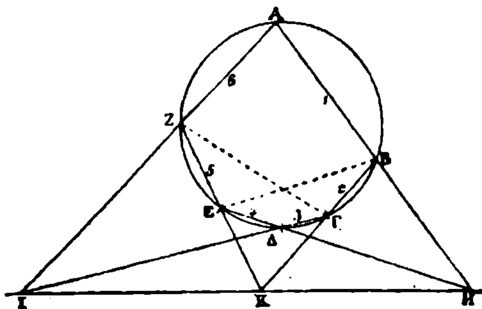
2) Ἡ θεώρησις ἑνὸς βοηθητικοῦ στερεοῦ (§ 169 κ. ἐπμ.), ὡς λ.χ. ἑνὸς τριέδρου τεμνομένου ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ΒΓΜ, Β΄Γ΄Μ΄, ἑρμηνεύει εὐκόλως τὸ ἀνωτέρω θεώρημα.

3) Τὸ προηγούμενον θεώρημα ὁδηγεῖ εἰς μίαν πολὺ ἁπλῆν ἀπόδειξιν τοῦ ἑπομένου θεωρήματος τοῦ Pascal. (Βλ. ἐπμ. § 1117 γ).

Ἑξάγραμμον τοῦ Pascal 319—IV

***1117 γ.* Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.**

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ ἑξάγωνον καὶ ΒΕ, ΖΓ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ. Ὑποθέσωμεν τὰς εὐθείας ΑΙ, ΑΗ καὶ ΔΙ, ΔΗ σταθερὰς καὶ



Σχ. 668.

θεωρήσωμεν μεταβλητὴν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Δ. Τὰ σημεῖα τομῆς Β, Γ, Ε, Ζ, τῆς περιφερείας ταύτης μετὰ τῶν σταθερῶν εὐθειῶν θὰ κινοῦνται ἐπ᾽ αὐτῶν.

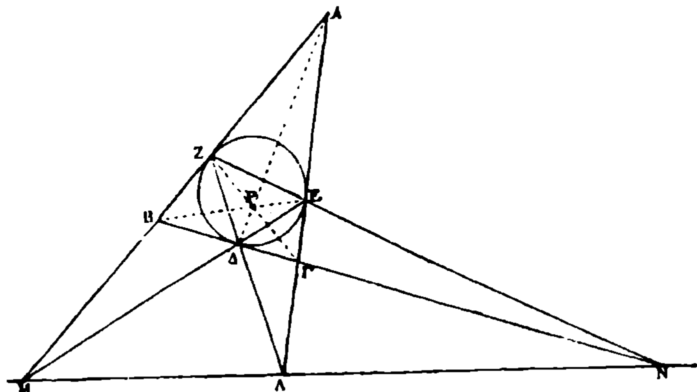
'Επειδὴ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΒΕ, ΕΖ, ΒΓ διατηρεῖ σταθερὰν διεύθυνσιν (§ 659), τὸ τρίγωνον ΒΕΚ θὰ ἔχῃ πλευρὰς παραλλήλους πάντοτε πρὸς σταθερὰς διευθύνσεις καὶ δύο κορυφάς του, τὰς Β, Ε, διαγραφούσας σταθερὰς εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ Η, τὰς ΗΑ καὶ ΗΕ.

Κατὰ τὸ προηγούμενον ἑπομένως θεώρημα, ἡ τρίτη κορυφή του Κ θὰ κινῆται ἐπ' εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Η τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

'Αλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΖΚ ἔχει πλευρὰς μὲ σταθερὰς ἐπίσης διευθύνσεις, αἱ δὲ κορυφαί του Γ καὶ Ζ διαγράφουν τὰς σταθερὰς εὐθείας ΙΔ καὶ ΙΑ. Ἄρα ἡ τρίτη κορυφή του Κ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ι τῶν δύο πρώτων.

Διὰ πᾶσαν, κατὰ συνέπειαν τῶν ἀνωτέρω, θέσιν τῶν σημείων τομῆς τῆν μεταβλητῆς περιφερείας μετὰ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν ΙΑΗ καὶ ΙΔΗ, τὸ σημεῖον τομῆς Κ τῶν ΒΓ καὶ ΕΖ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΙΗ. Ἤτοι τὰ τρία σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

1117 δ. Εἰδικαὶ περιπτώσεις. Μία ἢ περισσότεραι πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου δύνανται νὰ περιορισθοῦν εἰς σημεῖον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θεωροῦμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὴν ἀντίστοιχον κορυφὴν καὶ λαμβάνομεν νέα θεωρήματα. 'Αργότερον θὰ ἐξετάσωμεν ἐκ τούτων τὰ σχετιζόμενα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον. 'Ιδοὺ τὸ σχετικὸν πρὸς τρίγωνον.



Σχ. 660.

Θεώρημα. Τὰ σημεῖα τομῆς Λ, Μ, Ν τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου τριγώνου ΔΕΖ μετὰ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφάς, κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Τὸ ἐναλλακτὸν πρὸς αὐτὸ θεώρημα εἶναι τὸ ἑπόμενον :

Θεώρημα. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς ἑνὸς περιγεγραμμένου τριγώνου μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ.

Τὸ σημεῖον P εἶναι ὁ πόλος τῆς MN, καί, ἀντιστρόφως, ἡ εὐθεῖα ΛMN ἡ πολικὴ τοῦ *σημείου τοῦ Gergonne* P τοῦ τριγώνου ΑΒΓ

1117 ε. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦ *ἑξαγράμμου τοῦ Pascal* ἀποδεικνύεται κατὰ πολλοὺς τρόπους· βλέπε σχετικῶς εἰς N. A., 1903, σ. 56 n° 10, ἄρθρον τοῦ Lery.

Ἡ πολὺ ἁπλῆ ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἴδώσαμεν ἀνωτέρω ὀφείλεται εἰς τὸν Parrod (*Journal de Vuibert*, 1902, σ. 41).

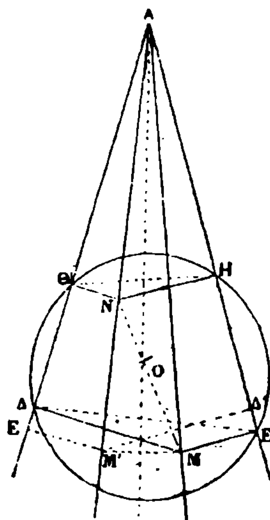
Θεώρημα 319—V

1118. 1). Αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας δύο τυχόντων σημείων ἐπὶ δύο εὐθειῶν ἰσογωνίων πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

2) Οἱ πόδες τῶν τεσσάρων καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, εἶναι σημεῖα τῆς αὐτῆς περιφερείας.

3) Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου καθέτων τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἰσογώνιον.

Ὀνομάζονται *ἰσογώνιοι* εὐθεῖαι, πρὸς τὰς πλευρὰς γωνίας ΔΑΕ, δύο εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΝ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἀγόμεναι καὶ συμμετρικαὶ πρὸς τὴν διχοτόμον αὐτῆς.



Σχ. 670.

1) Ἔστω Μ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α· θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$\frac{M'\Delta'}{M'E'}=\frac{NH}{N\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M\Delta}{ME}=\frac{NH}{N\Theta}.$$

2) $$\frac{A\Delta'}{AH}=\frac{AE'}{A\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Delta}{AH}=\frac{AE}{A\Theta}.$$

Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΘΗ εἶναι ἀντιπαράλληλοι, τὸ τετράπλευρον ἄρα ΔΕΗΔ ἐγγράψιμον. Τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΝ.

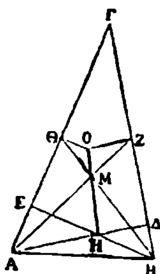
3) Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΘΝΗ εἶναι ἐγγράψιμον, γωνία ΝΘΗ = ΝΑΗ = ΘΑΜ· ἀλλὰ ἡ ΑΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΝ, ἄρα καὶ ἡ ΑΜ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΗ. Ὁμοίως, ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΝ.

1118 α. Θεώρημα ἀντίστροφον. Ἐὰν $\frac{M\Delta}{ME}=\frac{NH}{N\Theta}$, τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀνήκουν εἰς εὐθείας ἰσογωνίους.

Θεώρημα 320

1119. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τελευταίων σημείων εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο πρώτων. (Euler, 1765).



Σχ. 671.

Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων.

Ἂς προεκτείνωμεν τὴν ΗΜ κατὰ μῆκος ΜΟ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΜ καὶ ἃς συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Ο μετὰ τῶν μέσων Ζ καὶ Θ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΖ, ΟΘ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΓΒ καὶ ΓΑ, ἀντιστοίχως.

Αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους των· ἑπομένως ΜΒ = 2.ΜΘ, καὶ ἐπειδὴ ΜΗ ἐλήφθη ἴσον πρὸς 2.ΜΟ, τὰ τρίγωνα ΒΜΗ, ΘΜΟ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

Εἶναι, ἄρα, ἡ ΘΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ καὶ κάθετος ἑπομένως ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Ὁμοίως, ἡ ΖΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Ο κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ἤτοι τὰ σημεῖα Η, Μ, Ο εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας καὶ ΜΗ = 2.ΜΟ.

1120. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς : Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τὸ κέντρον βάρους καὶ τὸ ὀρθόκεντρον εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

2) Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων σχηματίζει μετὰ τῶν Ο, Μ, Η ἁρμονικὴν τετράδα [βλ. ἑπομ. § 1262, 2)]. Ἡ παρατήρησις αὕτη ἀνήκει εἰς τὸν Salmon (*Géométrie analytique*, σ. 109).

3) Ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Πράγματι, ΒΗ = 2. ΘΟ, ἀφοῦ ΒΜ = 2. ΘΜ.

1120 α. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (1765, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ἑνοῦσα τὸ ὀρθόκεντρον μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ὠνομάσθη *εὐθεῖα τοῦ Euler*. (Βλ. Baltzer, *Planimétrie*, § 12, n° 8). Ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων (§ 719).

Τὸ θεώρημα τοῦ Boutin (§ 1242, ο), ἀποδεικνύει μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἰδιότητα τῆς εὐθείας τοῦ Euler.

Ἐνδιαφέρον ἐπίσης εἶναι καὶ ἓν ἄρθρον τοῦ Terquem ἐπὶ τῶν γραμμικῶν σχέσεων μεταξὺ ὡρισμένων σημείων τοῦ τριγώνου. (N. A., 1842, σ. 79).

Εἰς τὸ *Journal d. Math. élém. et spéciales* (1879 καὶ 1880), ὑπάρχει πληρεστάτη σπουδὴ τοῦ τριγώνου ὑπὸ τοῦ James Booth, μέλους τῆς Βασιλικῆς Ἑταιρείας τοῦ Λονδίνου († 1878).

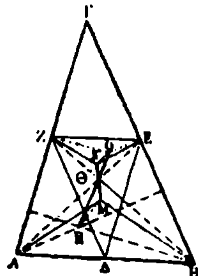
Θεώρημα 321

1121. **Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς ἐγγε-**

γραμμένης εἰς τὸ μέσον τρίγωνον, εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς· ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πρώτων σημείων εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο τελευταίων. (Βλ. *Introduction à la Géométrie supérieure*, ὑπὸ Housel, σ. 123).

Ἔστω Μ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ν τὸ κέντρον τῆς εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐγγεγραμμένης.

Αἱ διχοτόμοι ΑΜ, ΕΝ τῶν ἀντικειμένων γωνιῶν Α καὶ Ε τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΒΜ καὶ ΖΝ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΜΒ, ΖΝΕ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ ἡ γωνία ΒΑΜ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς Α καὶ ἡ ΝΕΖ τὸ ἥμισυ τῆς Ε, ἴσης πρὸς τὴν Α· ἐπίσης, γων. ΝΖΕ = ΜΒΑ.



Σχ. 672.

Ἀλλ' εἶναι $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.

ἄρα $ΕΝ = \frac{ΑΜ}{2}$.

Ἔστω τώρα Θ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς διαμέσου ΑΕ καὶ τῆς εὐθείας ΜΝ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΜΘ καὶ ΕΝΘ λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$\frac{ΕΘ}{ΑΘ} = \frac{ΝΘ}{ΜΘ} = \frac{ΕΝ}{ΑΜ} = \frac{1}{2},$$

αἵτινες δεικνύουν ὅτι τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων καὶ ὅτι ΜΘ = 2.ΘΝ.

1122. Θεώρημα. *Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου αὐτοῦ, εἶναι τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πρώτων σημείων εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο τελευταίων.*

Πρόκειται περὶ ἄλλης ἐκφωνήσεως τοῦ προηγουμένου θεωρήματος· ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τοῦ μέσου τριγώνου κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

1123. Σημείωσις. 1) Τὸ θεώρημα τοῦτο (§ 1121), μολονότι παρελήφθη ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Housel, χρονολογεῖται τουλάχιστον ἀπὸ τοῦ 1842 καὶ εἶναι πολὺ πιθανὸν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν Terquem· ἐπειδὴ ἀναφέρεται εἰς ἓν ἀξιοσημείωτον ἄρθρον τοῦ συγγραφέως αὐτοῦ (N. A., 1849, τόμος I, σ. 79, nº 2· ἐπίσης N. A., 1860, σ. 354). Πράγματι εἶναι τὸ θεώρημα I τοῦ Nagel.

2) Τὸ σημεῖον Μ, κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ΑΒΓ περιφερείας, εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Nagel τοῦ μέσου τριγώνου ΔΕΖ (βλ. ἐπμ. § 1142 α). Τὸ σημεῖον Ο, κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ΑΒΓ, εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΔΕΖ· ὅσον ἀφορᾷ τὸ σημεῖον Θ, τοῦτο εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον βάρους τῶν δύο τριγώνων καὶ κέντρον ὁμοιοθεσίας αὐτῶν.

3) Ἡ εὐθεῖα ΜΘΝ (σχ. 672), ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, θὰ ἠδύνατο νὰ ὀνομασθῇ εὐθεῖα τοῦ Housel, ὡς ἐκ τῆς ἀναλογίας της πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Euler (§ 1120).

Τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ μέσον τρίγωνον εἶναι ἐπίσης καὶ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (*Bulletin de Mathématiques*, τῶν Gérard καὶ Michel, 1902 - 1903, σ. 261).

Θεώρημα 321—I

1123 α. Εἰς τρίγωνον διὰ τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ α, ἡ ΒΓ, εἶναι ἡ μέση τῶν πλευρῶν β καὶ γ (ἰσοῦται δηλ. πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν) :

1) *Ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν μέσην πλευρὰν* α.

2) *Τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου, τὸ σημεῖον τοῦ Nagel αὐτοῦ καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, παραλλήλου πρὸς τὴν μέσην πλευράν.*

3) *Ἡ εὐθεῖα* AI_a *διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς μέσης πλευρᾶς.* (I_a εἶναι τὸ κέντρον τῆς παρεγγεγραμμένης εἰς τὴν γωνίαν Α περιφερείας).

4) *Ἡ ἀκτὶς* ρ_a *εἶναι ἴση πρὸς* υ_a .

5) *Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου* Ο *τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας κάθετος ἀπόστασις ἀπὸ τῆς μέσης πλευρᾶς εἶναι ἴση πρὸς* R — ρ.

6) *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ* Ο *ἀπὸ τῶν* β *καὶ* γ *ἰσοῦται πρὸς* 2ρ.

7) *Τὸ τμῆμα τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας* Α, *ἀπὸ τοῦ* Α *μέχρι τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου* Ι *τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς δύο ἴσα μέρη.*

8) *Τὸ κέντρον* Ι *καὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τοῦ Euler εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν μέσην πλευράν.*

9) *Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῆς τοῦ Euler εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μέσην πλευράν.*

10) *Μεταξὺ τῶν* α, R, ρ *ὑπάρχει ἡ σχέσις :* $\alpha^2 = 4(2R - \rho)\rho$. (*Journal de M. E.* τοῦ Longchamps, 1894, σ. 193· Droz - Farny. Ἐπίσης, *Bulletin de M. E.* τοῦ Ch. Michel, 1910, σ. 197, n° 2611· Pegorier).

Θεώρημα 322

1124. Ἐὰν ἑκάστη τῶν πλευρῶν μεταβλητοῦ παραλληλογράμμου διέρχεται διὰ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου δοθείσης εὐθείας γραμμῆς, τότε καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ θὰ διέρχωνται διὰ δύο σταθερῶν σημείων τῆς ἰδίας εὐθείας.

(*Nouvelle correspondance mathématique* τοῦ Catalan, 1877, σ. 146).

Σχ. 673.

Ἔχομεν :
$$\frac{ME}{MZ} = \frac{MA}{M\Gamma} = \frac{M\Theta}{MH} .$$

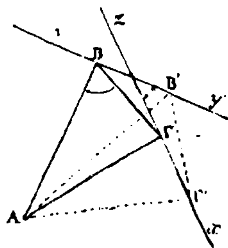
Λαμβάνεται, ἐπομένως, τὸ σημεῖον Μ διὰ διαιρέσεως τοῦ τμήματος ΘΕ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν σταθερῶν μηκῶν ΘΗ καὶ ΕΖ. Εἶναι ἄρα τοῦτο σταθερὸν σημεῖον, ὡς καὶ τὸ Ν.

Θεώρημα 323

1126. Τρίγωνον ΑΒΓ μεταβάλλεται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, μία κορυφή του Α νὰ εἶναι σταθερὸν σημεῖον ἐνῷ μία ἄλλη κορυφὴ Β νὰ διαγράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν y. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τρίτη κορυφή του Γ διαγράφει ἐπίσης εὐθεῖαν.

1η Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον εἰς τὴν εἰδικὴν θέσιν, καθ' ἣν ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν y. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Γ φέρωμεν εὐθεῖαν zx κάθετον ἐπὶ τὴν θέσιν τῆς ΑΓ, αὕτη θὰ εἶναι ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

Ἂς θεωρήσωμεν, πράγματι, μίαν τυχοῦσαν θέσιν ΑΒ' τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν Β'ΑΓ' ἴσην πρὸς τὴν ΒΑΓ. Τὸ νέον τρίγωνον Β'ΑΓ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ· ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΒ', ΑΓΓ', ὡς ἔχοντα ἴσην μίαν ὀξεῖαν γωνίαν, τὴν ΒΑΒ' = ΓΑΓ', εἶναι ἰσογώνια καὶ ἑπομένως



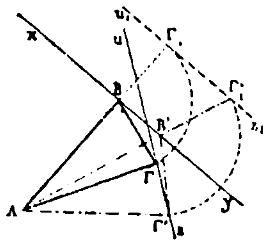
Σχ. 674

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB'}{A\Gamma'},$$

τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' εἶναι ἐπίσης ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ἀπ' εὐθείας ἓν τρίγωνον ΑΒ'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸν ΑΒΓ καὶ ἔχον τὴν κορυφὴν Β' ἐπὶ τῆς y, ἡ κορυφή του Γ' ἀναγκαίως θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς zx.

2α Ἀπόδειξις. Ὁ ἀκόλουθος τρόπος ἀποδείξεως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπωφελῶς διὰ πᾶν σχῆμα μεταβαλλόμενον εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένῃ ὅμοιον ἑαυτῷ, μία του κορυφὴ νὰ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, ἐνῷ μία ἄλλη νὰ διαγράφῃ τυχοῦσαν δοθεῖσαν γραμμήν.

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $B\Gamma_1 = B\Gamma$. Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{B\Gamma_1}{BA} = \frac{B\Gamma}{BA}$ εἶναι σταθερός, ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ_1 εἶναι εὐθεῖα u_1z_1, παράλληλος πρὸς τὴν xy (§ 63). Ἐὰν λοιπὸν μεταφέρωμεν (ἐπὶ τῶν τόξων τοῦ σχήματος), τὸ σημεῖον Γ_1 εἰς Γ, τὸ Γ_1' εἰς Γ' κλπ., σχηματίζοντες γωνίας $\Gamma B \Gamma_1 = \Gamma' B' \Gamma_1' = \ldots 180^\circ - AB\Gamma =$ σταθ., τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας u_1z_1 λαμβάνουν θέσεις ἐπὶ τῆς εὐθείας uz καὶ ἡ ὁποία, κατὰ



Σχ. 675.

συνέπειαν, θὰ εἶναι ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς Γ τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ([56]).

Θεώρημα 324

1126. Ἐὰν ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἡ μὲ διάμετρον τὴν πλαγίαν πλευρὰν ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου, τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἕκαστον τῶν σημείων τομῆς διαιρεῖ τὴν πλευρὰν αὐτὴν εἰς τμήματα τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

(*Μέθοδοι*, § 24).

Θεώρημα 324—I

1127. Δύο κάθετοι ΑΒ, ΓΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ (Σχ. 8) εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν αὐτῆς, ἡ δὲ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΑΔ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς σημεῖα Μ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι τὰ γινόμενα τῶν τμημάτων ΜΒ, ΜΓ καὶ ΝΒ, ΝΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ γινόμενον τῶν καθέτων τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ.

(*Μέθοδοι*, § 24, Παρ/σις 4).

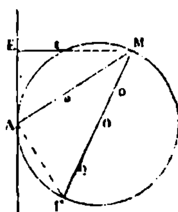
Θεώρημα 324—II

1128. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἡμιπεριφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς σταθερᾶς ἐφαπτομένης εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ θεωρουμένου σημείου ἀπὸ τῆς σταθερᾶς ἐφαπτομένης.

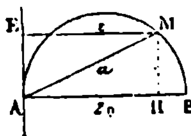
Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (Σχ. 676): $\alpha^2 = 2\rho \cdot \varepsilon$.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΟΘ καὶ τὴν χορδὴν ΑΘ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΜ, ΘΑΜ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἡ γωνία Θ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΑΕ. Ἐπομένως

$$\frac{M\Theta}{MA} = \frac{MA}{ME} \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 = 2\rho \cdot \varepsilon.$$



Σχ. 676.



Σχ. 677.

Ἄλλη ἀπόδειξις (Σχ. 677). Φέρομεν τὴν κάθετον ΜΗ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν

$$MA^2 = \alpha^2 = AH \cdot AB = 2\rho \cdot \varepsilon.$$

Παρατηρήσεις. 1) *Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἕπεται* $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2}{2\rho}$.

---

56. Σημ. μετ. Βλ. § 1349.

2) Τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ θεωρηθῇ εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου γνωστοῦ:

Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ὕψους ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Πράγματι, ὅταν αἱ δύο κορυφαὶ τῆς βάσεως τριγώνου συμπέσουν εἰς ἓν σημεῖον, ἡ πλευρὰ αὕτη καθίσταται ἐφαπτομένη τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ καθίστανται ἴσαι πρὸς τὴν χορδὴν τὴν συνδέουσαν τὴν τρίτην κορυφὴν πρὸς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, τὸ δὲ ὕψος γίνεται ἡ κάθετος ἐκ τῆς ἐν λόγῳ κορυφῆς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. Ἄρα...

3) Τὸ θεώρημα τοῦτο δὲν εἶναι παρὰ εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ *Θεωρήματος τοῦ Πάππου*, τοῦ σχετικοῦ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον (§ 1214). Εἶναι ὅμως προτιμότερον νὰ τὸ παρουσιάσωμεν ἀπ' εὐθείας, ἐπειδὴ ὁδηγεῖ ὄχι μόνον εἰς νέαν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ἀλλὰ καὶ εἰς διαφόρους ἄλλας ἐνδιαφερούσας ἐπεκτάσεις (§§ 1176, 1178, 1179, 1222, 1224).

Θεώρημα 325

1129. **Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου περιφερείας ἀπὸ δοθείσης χορδῆς αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.**

(*Μέθοδοι*, § 25).

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἂς εἶναι $MA=\alpha$, $MB=\beta$, $M\Delta=\delta$, $ME=\varepsilon$, $MZ=\zeta$.

Θὰ ἔχωμεν $2\rho\,.\,\delta=\alpha\beta$

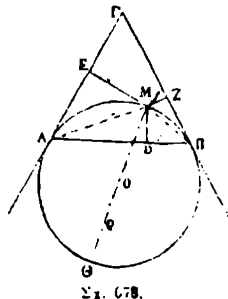
ἢ $\delta^2=\dfrac{\alpha^2\beta^2}{4\rho^2}$.

Ἀλλ' εἶναι $\alpha^2=2\rho\,.\,\varepsilon$ (§ 1128)

ἢ $\varepsilon=\dfrac{\alpha^2}{2\rho}$.

Ἐπίσης $\zeta=\dfrac{\beta^2}{2\rho}$

ἄρα $\delta^2=\dfrac{\alpha^2}{2\rho}\cdot\dfrac{\beta^2}{2\rho}=\varepsilon\,.\,\zeta$.



Σχ. 678.

Ὁμοιότης καὶ Ὁμοιοθεσία

1130. ***Ὁρισμοί.*** Δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια ἐὰν ἔχουν τὰς γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Τὰ πολύγωνα ταῦτα ἀναλύονται εἰς τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Δύο καμπύλα σχήματα εἶναι ὅμοια ἐὰν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ὅρια ὁμοίων πολυγώνων.

Εἰς μέγα πλῆθος περιπτώσεων, δὲν εἶναι ἀναγκαία ἡ ἀνάλυσις εἰς τρίγωνα πρὸς διαπίστωσιν τῆς ὁμοιότητος δύο σχημάτων. Ἀρκεῖ ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἑπομένων παρατηρήσεων καὶ συλλογισμῶν καὶ τῶν συνεπειῶν αὐτῶν (§§ 1131 καὶ 1133).

Ὁμοιόθετα σχήματα ὀνομάζονται τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα σχήματα.

Σημείωσις. Ἡ σπουδὴ τῶν ὁμοίων σχημάτων ὀφείλεται εἰς τὸν *Θαλῆν*. Ἡ θεώρησις τῶν σχημάτων, τῶν ὄχι μόνον *ὁμοίων* ἀλλὰ καὶ *ὁμοίως κειμένων*, ἔγινε ὑπὸ τοῦ Poncelet τὸ 1822 (*Traité des propriétés projectives des figures*, tome I, chap. III). Ὁ ὅρος, τέλος, *ὁμοιόθετα σχήματα* ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Chasles τὸ 1827 (*An. d. Gergonne*, tome XVIII, σ. 280).

1131. Κυρία μέθοδος. 1) *Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ἀναγκαίων καὶ ἱκανῶν συνθηκῶν διὰ τὴν ἰσότητα τῶν σχημάτων, διατηροῦμεν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἰσότητα ἀντιστοίχων γραμμῶν διὰ λόγων ἴσων.*

Παράδειγμα. Δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἑπομένως, *δύο παραλληλόγραμμα* εἶναι ὅμοια ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

2) *Τὰ δεδομένα, ἅτινα ἐπιτρέπουν τὴν κατασκευὴν ἑνὸς σχήματος καὶ μόνον ἑνός, ὁδηγοῦν εἰς περίπτωσιν ἰσότητος καὶ κατὰ συνέπειαν εἰς περίπτωσιν ὁμοιότητος.*

Παράδειγμα. Μὲ βάσιν δοθεῖσαν, ὕψος ἐπ' αὐτὴν δοθὲν καὶ ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν δοθεῖσαν, δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν παρὰ μόνον ἓν τρίγωνον· ἄρα, δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ ἀπέναντι πλευρὰν καὶ ἐπ' αὐτῆς ὕψος ἴσα.

Κατ' ἀκολουθίαν:

Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, βάσεις δὲ καὶ ὕψη ἐπ' αὐτὰς ἀνάλογα.

1132. Παρατήρησις. *Ἐὰν τὰ δεδομένα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἀνήκουν εἰς πολλὰ σχήματα, διάφορα ἀλλήλων κατὰ μορφὴν καὶ μέγεθος, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ἐπὶ τῆς ἰσότητος δύο σχημάτων ἐχόντων τὰ αὐτὰ (ὡς ἄνω) δεδομένα, οὐδὲ ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων ἅτινα δύνανται νὰ προκύψουν ἐκ τῶν πρώτων.*

Οὕτω λ. χ. εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἐγγεγραμμένα, ἰσοσκελῆ καὶ ἔχοντα δεδομένον τὸ ἄθροισμα βάσεως καὶ ὕψους (§ 211). Δὲν δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσας περιφερείας καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα βάσεως καὶ ὕψους ἀντιστοίχως. Ἀνάλογον ἐπιφύλαξιν θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν.

Μία ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἀληθὴς πρότασις εἶναι λ. χ. ἡ ἑπομένη:

Εἰς δύο περιφερείας ἀκτίνων ρ καὶ ρ' ἐγγράφομεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἔχοντα λ καὶ λ' ὡς ἀντίστοιχα ἀθροίσματα τῆς βάσεως καὶ ὕψους αὐτῶν. Οὕτω λαμβάνομεν δύο τρίγωνα Τ *καὶ* Σ *εἰς τὸν κύκλον (ρ) καὶ δύο ἄλλα* Τ' *καὶ* Σ' *εἰς τὸν κύκλον (ρ'). Τὰ τρίγωνα* Τ, Τ' *εἶναι ὅμοια μεταξύ των, ὡς καὶ τὰ* Σ *καὶ* Σ', *ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις:*

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

1133. Συνέπειαι. 1) *Πάντα τὰ σχήματα ἑνὸς δοθέντος εἴδους εἶναι ὅμοια ἐὰν τὸ σχῆμα ὁρίζεται ἐξ ἑνὸς μόνου μήκους.*

Παράδειγμα. Τὰ τετράγωνα εἶναι ὅμοια σχήματα. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἑνὸς ὡρισμένου πλήθους πλευρῶν, τὰς παραβολάς, τὰς ἀρχιμηδείους ἕλικας, τὰς κυκλοειδεῖς.

2) *Ἐκ τῶν σχημάτων ἑνὸς δοθέντος εἴδους, τῶν ὁριζομένων ἐκ δύο μηκῶν, δύο τυχόντα ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοια ἐὰν τὰ δύο ταῦτα μήκη εἰς τὸ ἓν σχῆμα εἶναι εὐθέως ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα.*

Παράδειγμα. Δύο ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια ἐὰν αἱ βάσεις των εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὕψῶν.

Δύο ἐλλείψεις εἶναι ὅμοιαι ἐὰν οἱ ἄξονες τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀξόνων τῆς ἄλλης.

3) *Ἐκ τῶν σχημάτων ἑνὸς δοθέντος εἴδους, τῶν ὁριζομένων ἐκ γωνιῶν καὶ ὡρισμένων μηκῶν, δύο τυχόντα ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοια ἐὰν αἱ γωνίαι εἰς τὸ ἓν σχῆμα εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας εἰς τὸ ἄλλο, τὰ δὲ ὁμόλογα μήκη ἀνάλογα.*

Παράδειγμα. Δύο κυκλικοὶ τομεῖς εἶναι ὅμοιοι ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν.

Δύο παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους.

4) *Τὸ αὐτὸ ζήτημα δύναται ἐνίοτε νὰ διατυπωθῇ κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ἀναλόγως τῆς θεωρήσεως μηκῶν ἢ γωνιῶν.*

Παραδείγματα. Δύο ῥόμβοι εἶναι ὅμοιοι ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, *ἢ καί*, δύο ῥόμβοι εἶναι ὅμοιοι ἐὰν αἱ διαγώνιοι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι τῶν διαγωνίων τοῦ ἄλλου.

Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ὅμοια ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνίαν εἰς τὴν κορυφήν, *ἢ καί*, ὅταν αἱ βάσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὕψῶν αὐτῶν.

1134. *Διάφοροι προτάσεις*. Ἡ θεώρησις τῶν περιπτώσεων ἰσότητος δύο σχημάτων ἢ τῶν ἀναγκαίων δεδομένων διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς σχήματος, ἐπιτρέπει τὴν μόρφωσιν μεγάλου πλήθους προτάσεων. Περιοριζόμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς ἀνωτέρω δοθείσας καὶ μερικὰς ἀναφερομένας εἰς τὰ τραπέζια.

Δύο τραπέζια εἶναι ὅμοια ὅταν ἔχουν:

1) Τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς βάσεις ἀντιστοίχως ἀναλόγους.
2) Τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς διαμέσους ἀναλόγους τῶν ὕψῶν.
3) Τὰς τέσσαρας ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.
4) Τὰς βάσεις καὶ διαγωνίους ἀναλόγους.
5) Τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς διαγωνίους ἀναλόγους.

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν, εὑρίσκομεν δύο διάφορα ζεύγη ὁμοίων τραπεζίων· ἐπειδὴ ὑπάρχουν δύο διάφορα τραπέζια ἔχοντα γωνίας καὶ διαγωνίους δοθείσας (§ 1132).

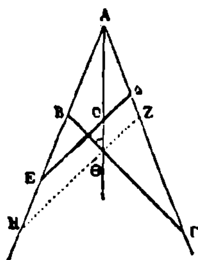
Θεώρημα 326

1135. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἴσοι κεκλιμέναι πρὸς τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, ὁρίζουν τρίγωνα ὅμοια.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ πρότασις εἶναι φανερά.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν διχοτόμον, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΑΟΔ καὶ ΒΘΑ ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΒΘΑ εἶναι ἰσογώνια καὶ Β = Δ. Καὶ τὰ τρίγωνα, ἄρα, ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ φέρωμεν τὴν ΖΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ θὰ εἶναι τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΖΗ ἴσα καὶ τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ ὅμοια.



Σχ. 679.

Παρατήρησις. Αἱ ἀντιπαράλληλοι ΒΓ, ΔΕ εἶναι εὐθεῖαι *ἰσοκλινεῖς* πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α (§ ἐπμ. 2458).

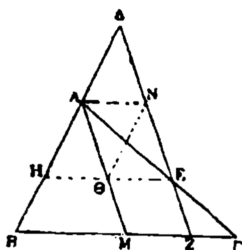
Θεώρημα 326—Ι

1135 α. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, πᾶσα παράλληλος ΔΝΕΖ πρὸς τὴν διάμεσον ΑΜ ὁρίζει ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α τμήματα ἀνάλογα τῶν πλευρῶν τούτων.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Ἂς φέρωμεν τὰς ΑΝ καὶ ΕΗ παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν. Τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ, ἐπειδὴ ΑΝ = ΘΕ = ΘΗ, καὶ ἡ ΘΝ παράλληλος, ἑπομένως, πρὸς τὴν ΔΗ. Ἄρα ΔΝ = ΘΑ καὶ ΔΑ = ΑΗ.



Σχ. 680.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράλληλος ΕΗ διαιρεῖ τὰς πλευρὰς εἰς μέρη ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν

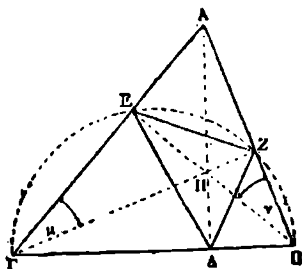
$$\frac{ΑΗ \text{ ἢ } ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Θεώρημα 327

1136. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἀνὰ δύο τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τριγώνου, ὁρίζουν τρία τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἡ γραφομένη ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου, διέρχεται διὰ τῶν ποδῶν Ε, Ζ δύο ὑψῶν· εἶναι, ἑπομένως, ἡ ΕΖ ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ ὅμοια.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα ΒΔΖ καὶ ΓΕΔ.



Σχ. 681.

Παρατήρησις. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν, εἶναι τὸ *ὀρθικὸν* τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ (§§ 292 ν καὶ 664 β).

Θεώρημα 327—Ι

1137. Τὰ ὕψη τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ τριγώνου.

Τὰ τετράπλευρα, ὡς τὸ ΓΔΗΕ, εἶναι ἐγγράψιμα ἐπειδὴ δύο ἀπέναντι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ὀρθαί. Ἄρα

$$\text{γων. } ΑΔΕ = μ, \quad ΑΔΖ = ν.$$

Ἀλλ' εἶναι $μ = ν$· ἑπομένως

$$\text{γων. } ΑΔΕ = ΑΔΖ.$$

Θεώρημα 327—ΙΙ

1138. Ἐάν, εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, δύο εὐθεῖαι ΒΜ, ΓΝ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ, τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΔΝ (Σχ. 682).

Ἂς φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, ΜΕΖ καὶ ΝΘΗ.

Τὰ τρίγωνα ΟΜΕ, ΟΘΝ εἶναι ἰσογώνια, ἀφοῦ $Θ = Μ$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, καὶ αἱ γωνίαι των εἰς τὸ Ο κατὰ κορυφήν. Ἄρα

$$\frac{ΜΕ}{ΝΘ} = \frac{ΟΕ}{ΟΝ} = \frac{ΔΖ}{ΔΗ} \qquad (1)$$

(ΔΖ, ΔΗ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων αὐτῶν τριγώνων) Ἀλλὰ

$$\frac{ΜΕ}{ΜΖ} = \frac{ΑΟ}{ΑΔ} = \frac{ΝΘ}{ΝΗ},$$

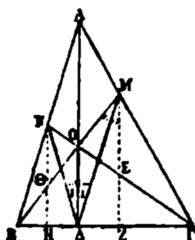
ἐκ τῆς ὁποίας ἀναλογίας ἕπεται :

$$\frac{ΜΕ}{ΝΘ} = \frac{ΜΖ}{ΝΗ}. \qquad (2)$$

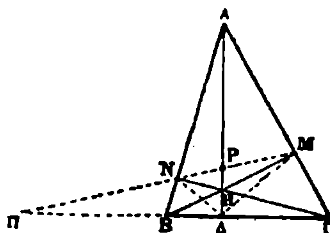
Ἐκ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΔΖ}{ΔΗ} = \frac{ΜΖ}{ΝΗ},$$

καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΜ, ΔΗΝ ἀποδεικνύονται ὅμοια, ὡς



Σχ. 682.



Σχ. 683.

ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ἑπομένως, γων. $ΜΔΖ = ΝΔΗ$ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Ρ, Π (Σχ. 683) διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΜΝ, ἡ δὲ γωνία ΡΔΠ εἶναι ὀρθή. Εἶναι, ἑπομένως, ἡ ΔΠ διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΔΝ.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα 1137 εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τούτου.

Θεώρημα 328

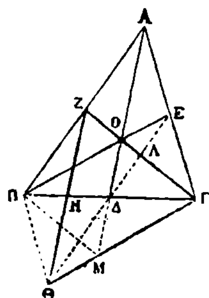
1139. Μὲ πλευρὰς τὰς διαμέσους δοθέντος τριγώνου κατασκευάζομεν τρίγωνον. Δείξατε ὅτι αἱ διάμεσοι τοῦ νέου τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· αἱ διάμεσοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς Ο καὶ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν μηκῶν των.

Λαμβάνοντες ΔΜ = ΔΟ, σχηματίζομεν παραλληλόγραμμον ΒΟΓΜ καὶ τρίγωνον ΟΓΜ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ· ἐπειδή,

$$ΟΜ = \frac{2}{3}ΑΔ, \quad ΟΓ = \frac{2}{3}ΖΓ \quad \text{καὶ} \quad ΓΜ = ΒΟ = \frac{2}{3}ΒΕ.$$

Ἐὰν λοιπὸν διὰ τοῦ σημείου Β φέρωμεν τὴν ΒΘ, παράλλ. πρὸς τὴν ΑΓ, θὰ ἔχωμεν ΘΓ = ΒΕ, ἡ δὲ ΖΘ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΜ· ἐπειδή, αἱ ΓΟ καὶ ΓΜ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ΓΖ καὶ ΓΘ. Ἡ ΟΜ, ἑπομένως, εἶναι ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΖΘ καὶ ΖΘ = ΑΔ.



Σχ. 684.

Εἶναι, ἄρα, τὸ τρίγωνον ΓΖΘ τὸ ἔχον ὡς πλευρὰς τὰς διαμέσους τοῦ ἀρχικοῦ ΑΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΗ, οὖσα τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ, εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΒ, ἕπεται ὅτι ἡ διάμεσος ΓΗ τοῦ νέου τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἄλλας διαμέσους τοῦ τριγώνου ΘΓΖ.

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα Θ, Δ, Ε εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ἡ ΘΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Θεώρημα 328—I

1140. Δίδεται τρίγωνον 1. Μὲ πλευρὰς τὰς διαμέσους αὐτοῦ, σχηματίζομεν τρίγωνον 2· μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου 2 σχηματίζομεν τρίγωνον 3 κ.ο.κ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα περιττῆς τάξεως, 1, 3, 5... εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα 2, 4, 6... ἀρτίας τάξεως. Εἰς ἑκάστην δὲ ὁμάδα, αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ τριγώνου (Ν. Α. 1863, σ. 93 καὶ 419, σ. 640).

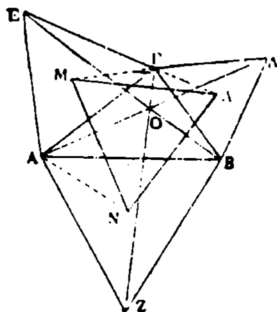
Θεώρημα 328—II

1140 α. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τυχόντος τριγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, κείμενα πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου πάντα ἢ

πάντα πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα τῶν τριγώνων τούτων εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Εἴδομεν (§ 754) ὅτι: ΑΔ = ΕΒ = ΓΖ. Ἀφ' ἑτέρου, γων. ΜΓΛ = ΑΓΔ = Γ + 60°

καὶ $\frac{ΜΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΛ}{ΓΔ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Σχ. 684

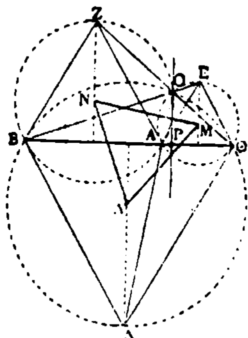
Τὰ τρίγωνα, ἑπομένως, ΑΔΓ καὶ ΜΛΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΜΑΝ καὶ ΓΖΒ, ΝΒΛ. Ἄρα

$$\frac{ΜΛ}{ΑΔ} = \frac{ΜΝ}{ΕΒ} = \frac{ΝΛ}{ΖΓ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ἢ ΜΛ = ΜΝ = ΝΛ,

ἀφοῦ ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (Σχ. 684 β).



Σχ. 684 β

Κατὰ ταύτην, τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου ΛΜΝ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τούτου (ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τῆς ΒΓ) εἶναι μηδέν, ἀφοῦ εἶναι αὔτη ὁ μέσος ὅρος τῶν τεταγμένων ([57]) τῶν τριῶν κορυφῶν Μ, Ν, Λ, ἡ δὲ τεταγμένη τοῦ Λ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν Μ, Ν, ἀκριβῶς ὅπως καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ Δ εἶναι ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῶν Ε καὶ Ζ.

1140 β. Σημείωσις. 1) Ὅταν τὰ σημεῖα Β, Α, Γ εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΒΑ, ΑΓ, ΒΓ τμήματα ἀνάλογα τῶν τμημάτων τούτων, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ (αἱ ἀνάλογοι τῶν τοῦ σχήματος 684 β), τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

Ἐὰν ὁ λόγος μεταβάλλεται, ὁ τόπος τῶν σημείων Ο εἶναι εὐθεῖα ΟΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐὰν δὲ θέσωμεν ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΒΑ = γ θὰ ἔχωμεν

$$ΒΡ = \frac{αγ\,(α + γ)}{α^2 + β^2 + γ^2}$$

καὶ

$$ΓΡ = \frac{αβ\,(α + β)}{α^2 + β^2 + γ^2}.$$

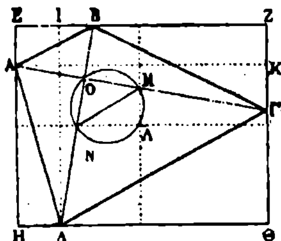
---

57. Σημ. μετ. Λαμβανομένων κατ' ἀπόλυτον τιμὴν (ἀριθμητικήν)'

2) Ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰ κέντρα αὐτῶν, λαμβάνομεν τρίγωνον Α′Β′Γ′. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν ἰδίαν κατασκευὴν καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ Α′Β′Γ′ λαμβάνομεν νέον τρίγωνον Α″Β″Γ″ κ.ο.κ. Ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων Α′Β′Γ′, Α″Β″Γ″... ἔχει ὅριον τρίγωνον ἰσόπλευρον, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ἀρχικὸν τρίγωνον ΑΒΓ. (E. Collignon, A. F, 1891, Marseille, § 3 *série de triangles*, σ. σ. 43 - 52).

Θεώρημα 329

1141. Τὰ ὀρθογώνια τὰ *περιγεγραμμένα* εἰς τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως, εἶναι ὅμοια μεταξύ των.



Σχ. 685.

Δύο ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια ἐὰν ὁ λόγος δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ἄλλου (§ 1133, 2).

Ἔστω ΕΖΘΗ ἓν περιγεγραμμένον ὀρθογώνιον.

Διὰ τῶν σημείων Α καὶ Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΓ, ΔΙΒ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι.

Ἄρα $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΔΙ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΒ}} =$ λόγος σταθερός.

Θεώρημα 329—I

1142. Ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων (εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν), εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα ΜΝ, τὸ ἑνοῦν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

Πράγματι, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν συμπίπτει πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἑνουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του καὶ αἵτινες εὐθεῖαι διέρχονται, προφανῶς, διὰ τῶν μέσων Μ, Ν τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου. Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν σημείων Λ εἶναι ἡ περιφέρειά ΜΟΝ.

Θεώρημα 329—II

1142 α. Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν (Ο), στρέφεται περὶ τὸ κέντρον Ο, αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, εἰς δύο τυχούσας θέσεις τοῦ σχήματος, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. (E. Beyens *Mathesis*, tome IX, 1889, σ. 149, ζήτ. 624 καὶ σ. 150, 3).

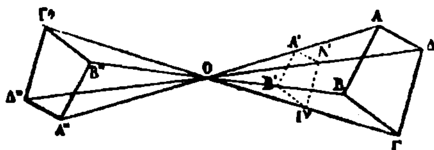
Θεώρημα 330

1143. Ἐὰν συνδέσωμεν σημεῖον Ο δι' εὐθειῶν μετὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ ... τυχόντος σχήματος καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′... τοιαῦτα, ὥστε:

$$\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΑ}'} = \frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΒ}'} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΓ}'} = \ldots = \frac{\mu}{\nu} = \text{σταθερόν},$$

τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ..., Α'Β'Γ'Δ'... εἶναι ὅμοια σχήματα καὶ ὁμοίως κείμενα ἤ, ἄλλως, ὁμοιόθετα (§§ 1130, 1144).

Τὰ τρίγωνα, ὡς τὰ ΑΟΒ, Α'ΟΒ' εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν μίαν



Σχ. 660.

γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἄρα $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{\mu}{\nu}$,

καὶ γων. $OAB = OA'B'$.

Ἐπίσης, $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\mu}{\nu}$, γων. $OA\Delta = OA'\Delta'$.

Ἑπομένως: γων. $BA\Delta = B'A'\Delta'$,

καὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ, Β'Α'Δ' εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Κατ' ἀκολουθίαν, τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια, ὡς ἀποτελούμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

1143 α. Θεώρημα ἀντίστροφον. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα δύο ὁμοιοθέτων σχημάτων, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1144. Ὁρισμοί. Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται κέντρον *ὁμοιότητος* ἢ *ὁμοιοθεσίας* καὶ *ἄξων ὁμοιοθεσίας* πᾶσα εὐθεῖα ΟΑΑ' διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιότητος.

Ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι *εὐθεῖα* ἢ *θετική*, ἐὰν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας Ο.

Αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΑ', ἔχουσαι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἔχουν μήκη μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ὁ λόγος $\frac{OA}{OA'}$, εἶναι θετικός.

Ἡ ὁμοιοθεσία ὀνομάζεται *ἀντίστροφος* ἢ *ἀρνητικὴ* ἐὰν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο· αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΑ' ἔχουν τότε ἀντιθέτους διευθύνσεις, τὰ σημεῖα τῶν μηκῶν των λαμβάνονται ἀντίθετα καὶ ὁ λόγος $\frac{OA}{OA'}$ εἶναι ἀρνητικός.

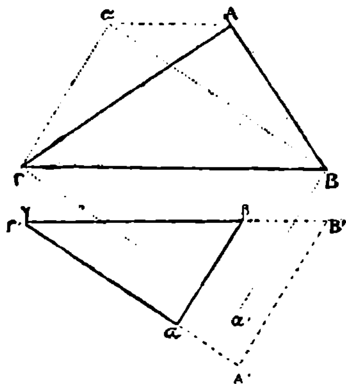
Σημείωσις. Ὁ ὅρος *κέντρον ὁμοιότητος*, ὡς καὶ ἡ σπουδὴ τῶν σημείων τούτων, ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (*Actes de Saint-Pétersbourg*, σ. 154 — Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, § 7, n° 3).

1145. Θεώρημα. Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας δύο πολυγώνων τέμνει τὰς πλευράς, ἢ τὰς προεκτάσεις αὐτῶν, κατὰ ση-

μεῖα ὁμόλογα καὶ ὁρίζει ἐπ' αὐτῶν τμήματα ἀνάλογα (ἀπὸ ὁμολόγων κορυφῶν ἀρχόμενα).

'Αντιστρόφως, πᾶσα εὐθεῖα συνδέουσα δύο ὁμόλογα σημεῖα, εἶναι ἄξων ὁμοιοθεσίας καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιότητος.

1146. *'Ορισμοί.* 1) *Εὐθέως ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα.* Δύο σχήματα κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον λέγονται εὐθέως ὅμοια, ἐὰν ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο σχήματα εὐθέως ἴσα (Σχ. 686 α).



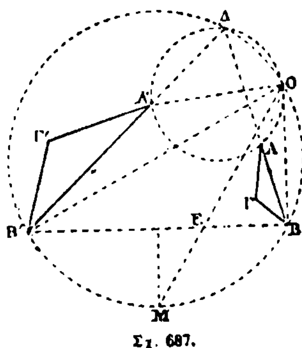
Σχ. 686 α

2) *Κέντρον ὁμοιότητος ἢ διπλοῦν σημεῖον* ([58]). 'Ονομάζεται κοινὸν κέντρον ὁμοιότητος ἢ διπλοῦν σημεῖον δύο σχημάτων εὐθέως ὁμοίων, ἓν σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε, συνδέοντες αὐτὸ μετὰ δύο τυχόντων σημείων Μ, Ν τοῦ ἑνὸς σχήματος καὶ μετὰ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν Μ', Ν' τοῦ ἄλλου σχήματος, νὰ λαμβάνωμεν δύο τρίγωνα ΟΜΝ, ΟΜ'Ν' εὐθέως ὅμοια.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ προκῦπτον ἐκ συμπτώσεως δύο ὁμολόγων σημείων τῶν δύο σχημάτων, αἱ δὲ ἀποστάσεις του ἀπὸ δύο ὁμολόγων σημείων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν δύο ὁμοίων σχημάτων.

Θεώρημα 330—I

1146 α. Δύο ἐπίπεδα σχήματα καὶ εὐθέως ὅμοια ὁρίζουν ἓν κοινὸν κέντρον ὁμοιότητος ἢ διπλοῦν σημεῖον τῶν δύο σχημάτων.



Σχ. 687.

'Αρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν δύο ὁμόλογα τμήματα ΑΒ, Α'Β'. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Δ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΒ' καὶ δύο ζευγῶν ὁμολόγων σημείων, Α, Α', Β, Β' γράφομεν περιφερείας. Τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Ο τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι τὸ ζητούμενον διπλοῦν σημεῖον.

Πράγματι,τὰ τρίγ. ΑΟΒ, Α'ΟΒ' εἶναι εὐθέως ὅμοια. 'Επειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΑ', ΒΟΒ' εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν Δ καὶ ἐπομένως γων. ΑΟΒ = ∢Α'ΟΒ'· τὰ δὲ παραπληρώματα τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν ΒΑΟ, Β'Α'Ο μετροῦνται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΟ.

---

58. Σημ. μετ. Βλέπε σχετικῶς: Hadamard, Leçons de Géométrie, I, § 150, ὡς καὶ ἐπμ. § 1147.

1146 β. Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Ο κατασκευάζεται ἀκριβέστερον διὰ τῆς ἀγωγῆς τῆς διχοτόμου ΜΕΟ τῆς γωνίας ΒΟΒ'. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΒΒ' εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ΟΒ καὶ ΟΒ', δηλ. ἀνάλογα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β', ὁπότε τὸ σημεῖον Ο ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς περιφερείας ΒΔΒ' καὶ τῆς συνδεούσης εὐθείας τὸ σημεῖον διαιρέσεως Ε μετὰ τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου ΒΜΒ'.

Πρόβλημα 380—II

1146 γ. **Δοθέντων δύο εὐθέως ὁμοίων ἐπιπέδων σχημάτων, νὰ ἀχθοῦν ταῦτα εἰς θέσεις ὥστε τὸ ἓν νὰ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ἄλλου.**

Ὁρίζομεν πρῶτον τὸ διπλοῦν σημεῖον Ο τῶν δύο σχημάτων καὶ ἀκολούθως, διὰ καταλλήλου στροφῆς, φέρομεν τὸ Α' εἰς Α'', ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ, τὸ Β' εἰς Β'' κλπ.

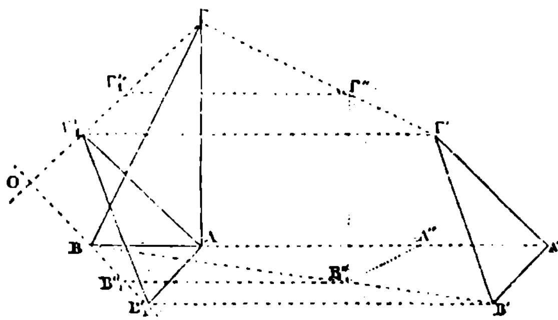
Ἡ ὁμοιοθεσία θὰ εἶναι εὐθεῖα ἐὰν τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ'' εἶναι ὁμόρροπα· ἄλλως, ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντίστροφος.

Θεώρημα 330—III

1146 δ. **Ἐὰν ἔχωμεν δύο εὐθέως ὅμοια σχήματα ΑΒΓ..., Α'Β'Γ'... καὶ διαιρέσωμεν τὰ ὁμόλογα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ σχῆμα τῶν σημείων διαιρέσεως Α'', Β'', Γ''... εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ δύο πρῶτα.**

Θεωρήσωμεν τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ'.

Μὲ κατάλληλον παράλληλον μεταφοράν, ἂς μεταφέρωμεν τὸ



Σχ. 688.

τρίγωνον Α'Β'Γ' εἰς τὴν θέσιν Α, B_1', $Γ_1'$ καὶ ἂς διαιρέσωμεν τὰ τμήματα ΒΒ' καὶ BB_1', ὕστερον τὰ ΓΓ' καὶ $ΓΓ_1'$ κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ ὁμόλογα σημεῖα Α'', Β'', Γ'', τὸ τρίγωνον Α''Β''Γ'' θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AB_1''Γ_1''$, τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ δύο θεωρηθέντα τρίγωνα. Εἶναι, ἐπομένως, τὸ Α''Β''Γ'' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ ἢ Α'Β'Γ'.

1146 ε. *Παρατηρήσεις.* 1) Τὸ προηγούμενον ζήτημα ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἑπόμενον, πολὺ ἐνδιαφέρον, θεώρημα.

Δύο σχήματα εὐθέως ὅμοια καὶ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δύνανται

τὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο διάφοροι θέσεις ἑνὸς σχήματος μεταβλητοῦ μὲν κατὰ μέγεθος ἀλλὰ ἀμεταβλήτου κατὰ μορφὴν καὶ τοῦ ὁποίου τὰ διάφορα σημεῖα ὀλισθαίνουν ἐπὶ εὐθειῶν.

2) Μεταξὺ τῶν διαφόρων τροχιῶν τὰς ὁποίας δύνανται νὰ διαγράψουν τὰ διάφορα σημεῖα ἑνὸς σχήματος Α'Β'Γ'... διὰ νὰ ἀχθῇ εἰς σύμπτωσιν ([59]) πρὸς τὸ ὅμοιον πρὸς αὐτὸ σχῆμα ΑΒΓ..., θὰ πρέπει νὰ ἀναφέρωμεν καὶ τὰς λογαριθμικὰς ἕλικας (βλ. ἐπμ. § 2509).

3) Τὸ θεώρημα τῆς § 1146 δ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπέκτασις τοῦ τῆς § 1143, τοῦ σχετικοῦ πρὸς δύο σχήματα εὐθέως ὁμοιόθετα.

4) Ἐὰν ἐπὶ τῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' κατασκευάσωμεν ὅμοια τρίγωνα ΑαΑ', ΒβΒ', ΓγΓ', τὸ τρίγωνον αβγ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ ΑΒΓ ἢ Α'Β'Γ'. (Laisant, *Mathesis*, 1894, σ. 164, n° 12).

Θεώρημα 331

1147. **Δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ', οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὁρίζουν ἓν κέντρον ὁμοιότητος.**

Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εὑρίσκεται ἓν σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{O\Gamma}{O\Gamma'}, \text{ κλπ.}$$

καὶ ὅτι: γων. ΑΟΑ' = ΒΟΒ' = ΓΟΓ'...

Ἂς προεκτείνωμεν δύο ὁμολόγους πλευρὰς ΑΒ, Α'Β' καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἂς γράψωμεν τὰς περιφερείας ΑΜΑ' καὶ ΒΜΒ'. Τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς Ο τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἕνεκα, πράγματι, τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων ΑΟΑ'Μ, ΒΟΒ'Μ, αἱ γωνίαι ΑΟΑ', ΒΟΒ' εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας Μ· εἶναι ἄρα γων. ΑΟΒ = Α'ΟΒ'.

Ἀφ' ἑτέρου καὶ γων. ΟΑΒ = ΟΑ'Β', ὡς παραπληρωματικαὶ ἐπίσης τῆς γωνίας ΟΑ'Μ. Εἶναι, ἑπομένως, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, καὶ

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{\mu}{\nu}=\text{λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο σχημάτων.}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ, Β'Α'Δ' εἶναι ὅμοια ἐξ ὑποθέσεως

καὶ
$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'}=\frac{\mu}{\nu}=\frac{OA}{OA'},$$

ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΟΔ, Α'ΟΔ' εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας Α = Α' καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ἄρα

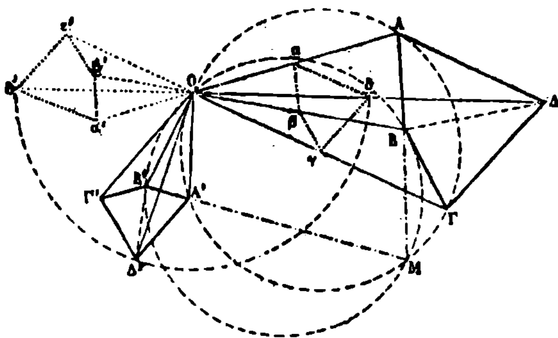
$$\text{γων. } AO\Delta = A'O\Delta' \quad \text{καὶ} \quad \frac{O\Delta}{O\Delta'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ δύο τυχούσας ἄλλας ὁμολόγους κορυφὰς καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Ο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν δοθέντων πολυγώνων.

---

59. Σημ. μετ. Κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς 1).

Αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες, ὡς αἱ ΟΑ καὶ ΟΑ' ἢ ΟΒ καὶ ΟΒ', σχηματίζουν γωνίας ΑΟΑ', ΒΟΒ' σταθεράς· ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας Μ, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο τυχουσῶν ὁμολόγω· ˉλευρῶν.



Σχ. 680.

1147 α. Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν στρέψωμεν τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ' περὶ τὸ σημεῖον Ο εἰς τρόπον, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν αβγδ, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ γίνονται εὐθέως ὁμοιόθετα ἀλλήλων. Εἰς τὴν θέσιν α'β'γ'δ' τοῦ Α'Β'Γ'Δ', τὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ α'β'γ'δ' εἶναι ἀντιστρ·ϕως ὁμοιόθετα ἀλλήλων. (§ 1125, 2α ἀπόδειξις).

2) Ἐὰν προεκτείνωμεν δύο τυχούσας ἄλλας ὁμολόγους πλευράς, ὡς τὰς ΒΓ καὶ Β'Γ', μέχρι τῆς τομῆς των Ν, αἱ περιφέρειαι ΒΝΒ', ΓΝΓ' διέρχονται διὰ τοῦ προηγουμένως εὑρεθέντος σημείου Ο.

2) Τὸ *κέντρον ὁμοιότητος* δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι καὶ τὸ *διπλοῦν σημεῖον* τῶν σχημάτων αὐτῶν· ἐπειδὴ προκύπτει ἐκ τῆς συμπτώσεως δύο ὁμολόγων αὐτῶν σημείων.

4) Αἱ ἀποστάσεις τοῦ διπλοῦ σημείου ἀπὸ δύο τυχουσῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχουν λόγον, ὃν καὶ αἱ πλευραὶ αὗται (§ 2500 καὶ ἑπμ.).

5) Ὅταν τὰ δύο σχήματα εἶναι ἀντιστρόφως ὅμοια, ὑποθέτουν ἄξονα συμμετρίας καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ τὰ καταστήσωμεν ὁμοιόθετα ἀλλήλων εἰμὴ διὰ στροφῆς τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, *εἰς τὸν χῶρον,* περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας. Τὸ *διπλοῦν σημεῖον* ἢ *κέντρον ὁμοιότητος* εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς *διπλῆς εὐθείας.* Αὕτη συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας. (Βλ. § 2500 καὶ ἑπμ.).

Θεώρημα 331—I

1148. Δοθέντων πολυγώνου ΑΒΓΔ καὶ σημείου Ο, φέρομεν τὰς συνδεούσας τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου εὐθείας καὶ κατασκευάζομεν γωνίας ΑΟΑ', ΒΟΒ'... ἴσας πρὸς δοθεῖσαν φ. Ἐὰν τὰ σημεῖα Α', Β'... ἐκλεγοῦν οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΟΑ}{ΟΑ'} = \frac{ΟΒ}{ΟΒ'} = \ldots = \frac{μ}{ν} = \text{σταθερός λόγος},$$

τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

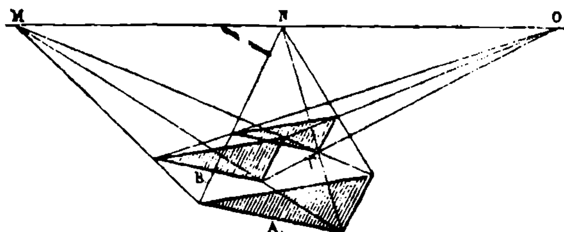
Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου (§ 1147). Διὰ τὴν ἀπόδειξίν του, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα α', β', γ', δ' (τοῦ προηγουμένου σχήματος) εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΟ, ΒΟ, ... καὶ φέρονται εἰς τὰς θέσεις Α', Β' ... διὰ [καταλλήλου] στροφῆς περὶ τὸ σημεῖον Ο (§ 1125, 2α ἀπόδειξις).

Θεώρημα 331—II

1149. Τὰ τρία κέντρα ὁμοιότητος τριῶν ὁμοιοθέτων, ἀνὰ δύο, πολυγώνων **εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.**

Ἔστω Μ τὸ κέντρον ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων (Α) καὶ (Β), Ν τὸ τῶν (Α) καὶ (Γ). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁμοιότητος Ο τῶν πολυγώνων (Β) καὶ (Γ).

Ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ Μ, εἶναι ἄξων ὁμοιότητος διὰ τὰ πολύγωνα (Α) καὶ (Β) καὶ ὡς διερχομένη διὰ τοῦ Ν



Σχ. 69'

εἶναι ἄξων ὁμοιότητος διὰ τὰ (Α) καὶ (Γ). Εἶναι, ἄρα, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἄξων ὁμοιότητος διὰ τὰ πολύγωνα (Β) καὶ (Γ) καὶ ὡς τοιαύτη διέρχεται κατ' ἀνάγκην διὰ τοῦ σημείου Ο.

Παρατήρησις. Ἡ πρότασις δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῶν θεωρημάτων ἐπὶ τῶν διατεμνουσῶν.

Τὰ θεωρηθέντα κέντρα ὁμοιότητος εἶναι καὶ τὰ τρία ἐξωτερικὰ ἢ δύο ἐξωτερικὰ καὶ ἓν ἐσωτερικόν.

Ἐπίπεδα σχήματα ἀντιστρόφως ὅμοια

1150. ***Ὁρισμός.*** Δύο σχήματα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λέγονται *ἀντιστρόφως* ἢ *ἐμμέσως* (indirectement) ὅμοια, ἐὰν ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο σχήματα ἀντιστρόφως ἴσα (§ 771 κλπ.).

Ἡ σπουδὴ τῶν ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων εἶναι πολὺ χρήσιμος διὰ τὴν βαθυτέραν γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀντιστρόφως ἴσων σχημάτων.

Θεώρημα 332

1150 α. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ὁμολόγων **πλευρῶν δύο ἀντιστρόφως ὁμοίων ἐπιπέδων πολυγώνων, εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.**

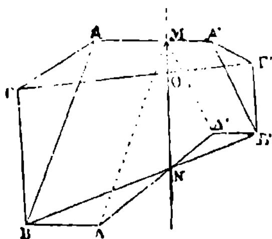
Ἡ ἀπόδειξις ὁμοία ὡς καὶ εἰς τὸ σχετικὸν πρὸς δύο ἀντιστρόφως ἴσα σχήματα θεώρημα (§ 771 α).

Θεώρημα 332—Ι

1150 β. **Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν διαιρούντων τὰ τμήματα, τὰ συνδέοντα ζεύγη ὁμολόγων σημείων δύο ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων, κατὰ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν, εἶναι εὐθεῖα γραμμή, παράλληλος πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ ὁμολόγων πλευρῶν.**

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς καὶ προκειμένου περὶ δύο ἀντιστρόφως ἴσων σχημάτων (§ 771 γ).

Ἂς διαιρέσωμεν τὸ τμῆμα ΑΑ′ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὁμολόγων τμημάτων ΑΒ, Α′Β′ καὶ διὰ τοῦ σημείου διαιρέσεως Μ ἂς φέρωμεν τὰς ΜΔ καὶ ΜΔ′, παραλλήλους καὶ ἴσας πρὸς τὰς ΑΒ καὶ Α′Β′, καθὼς καὶ τὴν ΔΔ′.



Σχ. 691.

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ Ν τῶν ΔΔ′ καὶ ΒΒ′ διαιρεῖ τὴν ΒΒ′ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν θεωρηθέντων τμημάτων καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν διεύθυνσιν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πράγματι, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΔΝ, Β′Δ′Ν δίδουν

$$\frac{BN}{B'N} = \frac{\Delta N}{\Delta' N} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'} = \frac{AM}{A'M} = \frac{AB}{A'B'},$$

ἡ δὲ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΜΔ′, ἀφοῦ τὰ τμήματα ΔΝ καὶ Δ′Ν εἶναι ἀνάλογα τῶν ΜΔ καὶ ΜΔ′. Εἶναι, ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα ΜΝ ὁ τόπος τῆς ἐκφωνήσεως καὶ εἶναι παράλληλος, προφανῶς, πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ὁμολόγων τμημάτων Α′Β καὶ Α′Β′, ΑΓ καὶ Α′Γ′ κλπ.

Θεώρημα 332—ΙΙ

1150 γ. **Δύο ἐπίπεδα σχήματα, ἀντιστρόφως ὅμοια, ὁρίζουν μίαν διπλῆν εὐθεῖαν, δηλ. δύο ὁμολόγους εὐθείας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως (ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας).**

Ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ διαιροῦσα τὰ τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ κατὰ τὸν λόγον ὁμοιότητος, ἐὰν θεωρηθῇ ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ ἓν σχῆμα, ἔχει ὡς ὁμόλογον ἐν τῷ δευτέρῳ σχήματι τὸν ἑαυτόν της, τὰ δὲ σημεῖα αὐτῆς ἔχουν ὡς ὁμόλογα σημεῖα κείμενα πάλιν ἐπ' αὐτῆς.

1150 δ. ***Παρατηρήσεις.*** 1) Ἡ εὐθεῖα αὕτη τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων, δὲν ἀποτελεῖται ἀπὸ διπλᾶ σημεῖα, διότι τὰ δύο σχήματα ἔχουν ἓν μόνον διπλοῦν σημεῖον. Κατωτέρω δίδομεν μερικὰς λεπτομερείας ἐπὶ τῶν ὁμοίων σημειοσειρῶν.

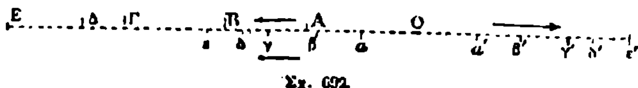
2) Τὴν διπλῆν εὐθεῖαν ΜΝ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, σχηματιζόντων πρὸς ἄλληλα γωνίαν 180°.

3) Δύο ἐπίπεδα σχήματα ἀντιστρόφως ὅμοια ὁρίζουν καὶ δεύτερον ζεῦγος συμπιπτουσῶν ὁμολόγων εὐθειῶν, δηλ. μίαν δευτέραν διπλῆν εὐθεῖαν.

1150 ε. Ὁρισμοί. 1) *Σημειοσειρά.* Μία ἀκολουθία σημείων α, β... ἐπ' εὐθείας γραμμῆς ὁρίζει μίαν *εὐθεῖαν σημειοσειρὰν* [ἢ καὶ ἁπλῶς μίαν *σημειοσειράν*.

2) *Ὅμοιαι σημειοσειραί.* Δύο σημειοσειραὶ Α, Β, Γ..., α, β, γ... καλοῦνται ὅμοιαι, ἐὰν ὁρίζουν ἀκολουθίαν ἴσων λόγων

$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\dots$$



Σχ. 692

Αἱ (ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν) σημειοσειραὶ Α, Β, Γ..., α, β, γ,... λέγονται εὐθέως ὅμοιαι, ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι τῶν ὁμολόγων σημείων βαίνουσι κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ἄλλως, λέγονται ἀντιστρόφως ὅμοιαι.

3) *Διπλοῦν σημεῖον.* Δύο ὅμοιαι καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως) σημειοσειραὶ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν (ἢ διπλοῦν) σημεῖον, δηλ. ἓν μόνον σημεῖον συμπῖπτον πρὸς τὸ ὁμόλογόν του. Οὕτω, ἂν Α, Β... καὶ α,.β... εἶναι αἱ δύο σημειοσειραί, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον σημεῖον Ο τοῦ φορέως των, διὰ τὸ ὁποῖον

$$\frac{\alpha O}{AO}=\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}\quad \text{κλπ.}$$

Θεώρημα 332—III

1150 ζ. Ἐὰν προβάλωμεν ([60]) ἐπὶ τῆς διπλῆς εὐθείας ΜΝ (Σχ. 691) τὰ ὁμόλογα σημεῖα Α, Β, Γ..., Α', Β', Γ'..., λαμβάνομεν δύο εὐθέως ὁμοίας σημειοσειράς. Ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων Α, Β,... ([61]) ἔχουν λόγον πρὸς τὰς τεταγμένας τῶν ἀντιστοίχως ὁμολόγων αὐτῶν σημείων Α', Β'... ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν α, β,..., καὶ α', β'...

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}=\frac{\gamma\alpha}{\gamma'\alpha'}=\dots=\frac{AB}{A'B'}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Αἱ φοραί, τέλος, τῶν δύο σημειοσειρῶν εἶναι αἱ αὐταί.

1150 η. Παρατήρησις. Αἱ τομαὶ τῶν ζευγῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς αἱ ΑΒ καὶ Α'Β', μετὰ τῆς εὐθείας ΜΝ ὁρίζουν ἐπίσης δύο εὐθέως ὁμοίας σημειοσειράς.

Θεώρημα 332—IV

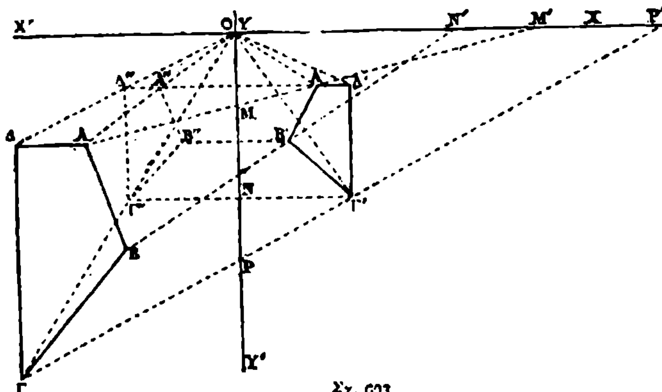
1150 θ. Δύο ἐπίπεδα σχήματα ἀντιστρόφως ὅμοια ὁρίζουν ἓν διπλοῦν σημεῖον, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ δύο τυχόντα ὁμόλογα σημεῖα εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν δύο σχημάτων.

---

60. Σημ. μετ. Παραλλήλως πρὸς τυχοῦσαν διεύθυνσιν (ε).
61. Σημ. μετ. Αἱ πλάγιαι, κατὰ τὴν (ε), ἀποστάσεις τῶν σημείων αὐτῶν ἀπὸ τῆς ΜΝ.

Ἔστω MN ἡ διπλῆ εὐθεῖα καὶ A″, B″, Γ″... τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῶν A′, B′, Γ′... πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Τὰ τμήματα AB, A″B″ εἶναι παράλληλα καί, κατὰ τὰ προηγούμενα, αἱ εὐθεῖαι AA″, BB″ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας MN. Τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν O εἶναι τὸ *διπλοῦν σημεῖον*, ἐπειδὴ τοῦτο



Σχ. 693.

εἶναι σημεῖον τοῦ σχήματος ABΓ συμπῖπτον πρὸς τὸ ὁμόλογόν του τοῦ σχήματος A′B′Γ′. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

1150 ι. Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα OMN, τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων, εἶναι διχοτόμος πασῶν τῶν γωνιῶν, ὡς αἱ AOA′, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο ὁμολόγων εὐθειῶν.

2) Ἐὰν τὰ δοθέντα σχήματα εἶναι ἀντιστρόφως ἴσα, τὸ *διπλοῦν σημεῖον* εὑρίσκεται εἰς ἄπειρον.

Θεώρημα 332—V

1150 κ. **Δύο ἐπίπεδα σχήματα ἀντιστρόφως ὅμοια ὁρίζουν δύο εὐθείας ὁμολόγους ἀντιστρόφως συμπιπτούσας.**

Διὰ τοῦ διπλοῦ σημείου O (Σχ. 693) φέρομεν κάθετον XOX′ ἐπὶ τὴν διπλῆν εὐθεῖαν OMN. Ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι εὐθεῖαι τῶν δύο σχημάτων ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημειοσειρὰς ἀντιστρόφως ὁμοίας (§ 1150 ε, 2), δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν αὐτὴν ὡς προκύπτουσαν ἐκ συμπτώσεως δύο ὁμολόγων εὐθειῶν τῶν ἐν λόγῳ σχημάτων.

1150 λ. Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα XOX′ ὁρίζει ἐπὶ τῶν εὐθειῶν AA′, BB′... τμήματα M′A, M′A′ κλπ. ἔχοντα λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν δύο σχημάτων. Δυνάμεθα, ἐπομένως, νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα MN ἢ YY′ εἶναι ἡ *εὐθεῖα τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων*, ἡ δὲ XX′ ἡ *εὐθεῖα τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων διαιρέσεων* τῶν δύο δοθέντων σχημάτων.

2) Αἱ δύο διπλαῖ εὐθεῖαι YY′, XX′ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας· ἡ πρώτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν

γωνιῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δύο σχημάτων καὶ ἡ δευτέρα παράλληλος πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν ἰδίων γωνιῶν.

Ὀνομάζομεν δὲ *ἐσωτερικὴν διχοτόμον* τῆς γωνίας δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὴν διχοτόμον τῆς ὀξείας, ἢ ἀμβλείας, γωνίας, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο τμημάτων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν φορέων τῶν δοθέντων τμημάτων.

3) Εἰς τὴν περίπτωσιν σχημάτων ἀντιστρόφως ἴσων ἡ εὐθεῖα XOX′ εὑρίσκεται εἰς ἄπειρον.

4) Εἶναι ἀναγκαία ἡ σπουδὴ τῶν ὁμοίων σχημάτων διὰ τὴν καλλιτέραν γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἴσων σχημάτων, ἀκριβῶς ὅπως, ὡς εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Poncelet, θὰ πρέπει νὰ μελετήσωμεν τὰς τομὰς δύο κωνικῶν τομῶν, τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διὰ νὰ γνωρίσωμεν καλλίτερον ἐκείνας δύο περιφερειῶν.

Εἰδικὴ περίπτωσις 332—VI

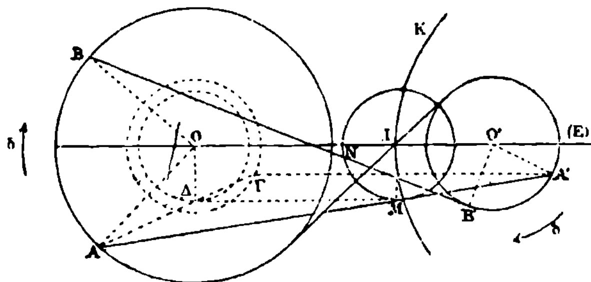
1150 μ. **Δύο περιφέρειαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύνανται κατ' ἀπείρους τρόπους νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο σχήματα εἴτε εὐθέως, εἴτε ἀντιστρόφως ὅμοια (Σχ. 694).**

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐκλέξωμεν δύο τυχόντα σημεῖα A, A′ ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τούτων ὡς ἀντίστοιχα καὶ ἀπὸ τῶν σημείων αὐτῶν, ὡς ἀρχῶν, νὰ λαμβάνωμεν τόξα *ὅμοια* (62) ἀνὰ δύο, ὡς τὰ AB καὶ A′B′ κλπ. Αἱ περιφέρειαι τότε θὰ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σχήματα εὐθέως ὅμοια, ἐὰν αἱ φοραὶ τῶν τόξων AB, A′B′ εἶναι αἱ αὐταί, καὶ ὡς ἀντιστρόφως ὅμοια, ἐὰν αἱ φοραὶ αὗται εἶναι ἀντίθετοι.

Ἐὰν I εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας καὶ E τὸ ἐξωτερικόν, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον IE εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ O καὶ O′ ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος (§ 61).

Θεώρημα 332—VII

1150 ν. **Τὸ διπλοῦν σημεῖον δύο περιφερειῶν, θεωρουμένων ὡς εὐ-**



Σχ. 694.

θέως ὁμοίων σχημάτων καὶ διὰ δοθείσας ἀρχὰς A καὶ A′, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας IE τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων.

---

62. Σημ. μετ. Τῶν αὐτῶν ἐπικέντρων γωνιῶν.

Ἔστωσαν (Ο) καὶ (Ο′) αἱ περιφέρειαι, θεωρούμεναι ὡς διαγραφόμεναι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ΑΒ ἢ Α′Β′. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ συστήματος αὐτῶν πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΙΚ, ἀφοῦ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τῶν διαφόρων ὁμολόγων σημείων τῶν εὐθέως ὁμοίων αὐτῶν σχημάτων θὰ πρέπει νὰ ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος.

1150 ξ. Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′... κατὰ ὡρισμένον λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, ὁ τόπος τῶν σημείων διαιρέσεως Μ, Ν... εἶναι περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν, ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τῆς ἐν § 1146 δ. Διὰ τὴν ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξίν της, γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς (Ο) καὶ ἴσην πρὸς τὴν (Ο′) καὶ ἐκ τοῦ Α′ φέρομεν τμῆμα Α′Γ, παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὴν διάκεντρον Ο′Ο. Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Μ παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν ταύτην τέμνει τὴν ΑΓ εἰς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\text{ΜΔ}}{\text{Α′Γ}} = \frac{\text{ΜΔ}}{\text{Ο′Ο}} = \frac{\mu}{\mu+\nu}$ ἢ $\text{ΜΔ} = \frac{\text{Ο′Ο}\cdot\mu}{\mu+\nu}$ = σταθ. μῆκος. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΟΑ εἶναι σταθερόν, τὸ μῆκος ΟΔ εἶναι προφανῶς τελείως ὡρισμένον. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐπαναλαμβανομένη καὶ διὰ τὸ τμῆμα ΒΒ′ ([63]), ὁδηγεῖ εἰς, ἀνάλογον πρὸς τὸ ΓΟΑ, τρίγωνον Γ_1ΟΒ (μὴ φαινόμενον εἰς τὸ σχῆμα) ἴσον πρὸς τὸ ΓΟΑ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν ΟΔ εὐθεῖα ΟΔ_1 εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΟΔ.

Εἶναι ἐπομένως πάντοτε $\text{ΟΔ} = \text{ΟΔ}_1 = \ldots \text{Κ}$ = σταθερὸν μῆκος καὶ ὁ τόπος τῶν σημείων Δ, Δ_1... περιφέρεια (Ο″) ὁμόκεντρος τῆς (Ο)· ὁ δὲ ζητούμενος τόπος τῶν σημείων Μ, Ν... ἡ προκύπτουσα ἐκ παραλλήλου πρὸς ΔΜ ([64]) μεταφορᾶς τῆς (Ο″) περιφέρεια.

2) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′... ἐξωτερικῶς κατὰ ὡρισμένον λόγον, ὁ τόπος τῶν σημείων διαιρέσεως εἶναι πάλιν περιφέρεια μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

3) Αἱ περιπτώσεις 1) καὶ 2) εἶναι, ὡς εἴπομεν, εἰδικαὶ τῆς προτάσεως τῆς § 1146 δ.

Σημείωσις. Ἡ περιφέρεια ΕΙ τῶν *ἀναλόγων ἀποστάσεων* ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ J. Neuberg καὶ *κύκλος ὁμοιότητος* ἢ *διχοτόμος περιφέρεια*. (Βλ. *Mathesis*, 1908, σ. σ. 152 καὶ 154).

Θεώρημα 332—VIII

1150 ο. Δύο περιφέρειαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θεωρούμεναι ὡς δύο σχήματα ἀντιστρόφως ὅμοια, ὁρίζουν: 1) Δύο διπλᾶς εὐθείας καθέτους

---

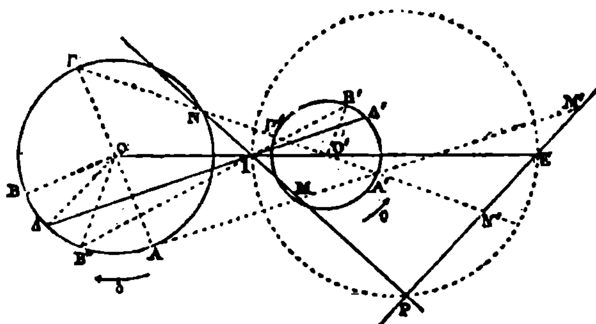
63. Σημ. μετ. Καὶ τὴν ὁποίαν ἂς κάμῃ ὁ ἀναγνώστης!
64. Σημ. μετ. Πρὸς τὸ σταθερὸν διάνυσμα ΔΜ.

ἐπ' ἀλλήλας. 2) Ἓν διπλοῦν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας ΕΙ τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων.

1) Βλ. § 1150 γ, δ κλπ.

2) Τὸ σημεῖον τομῆς Ρ τῶν διπλῶν εὐθειῶν εἶναι τὸ διπλοῦν σημεῖον τοῦ συστήματος καὶ τὸ μόνον κοινὸν τῶν δύο ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων. Εὑρίσκεται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας ΕΙ τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων, ἐπειδὴ ἡ ΜΝ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ι καὶ ἡ Μ'Ν' διὰ τοῦ Ε.

Ἂς φέρωμεν, πράγματι, τὴν εὐθεῖαν Β'ΙΒ'', τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς γωνίας ΒΟΒ'', καθὼς καὶ τὴν ΔΙΔ'. Τὰ σημεῖα Δ, Δ' διαιροῦν



Σχ. 000.

τὰ τόξα ΑΒ καὶ Α'Β' κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ εἶναι ἑπομένως ὁμόλογα σημεῖα τῶν δύο ἀντιστρόφως ὁμοίων σχημάτων. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τμήματα ΙΔ καὶ ΙΔ' ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος, τὸ σημεῖον Ι θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ (§ 1150 β), καθὼς καὶ τὸ σημεῖον Ε εἰς τὴν Μ'Ν'. Τὸ σημεῖον τομῆς Ρ, ἑπομένως, τῶν καθέτων τούτων εὐθειῶν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΕΙ.

1150 π. Σημείωσις. Βλ. εἰς *Mathesis* (1902, σ. σ. 85 - 89) ἓν ἐνδιαφέρον ἄρθρον τοῦ I. Neuberg *ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν*.

Ἀριθμητικαὶ σχέσεις εἰς τὸ Τρίγωνον

1151. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμητικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν κυρίων γραμμικῶν στοιχείων αὐτοῦ, ὡς εἶναι τὰ ὕψη, αἱ διάμεσοι, αἱ διχοτόμοι αὐτοῦ ἢ τὰ τμήματα τὰ συνδέοντα διάφορα ὡρισμένα σημεῖα ἐπ' αὐτῶν.

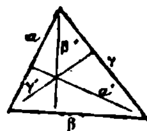
Χρησιμοποιοῦμεν πρὸς τοῦτο τὰ ὅμοια τρίγωνα καθὼς καὶ ἄλλας σχέσεις ἐκ τῶν ἤδη ἀποδειχθεισῶν. Συχνότατα ἐπίσης ἀναφερόμεθα καὶ εἰς τὸ *Πυθαγόρειον Θεώρημα*.

Θεώρημα 333

1151 α. **Δύο τυχόντα ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.**

Ἐὰν α, β εἶναι τὰ μήκη δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ α′, β′ τὰ ἐπ' αὐτὰς ὕψη, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ πλευρὰς α, β′ καὶ β, α′ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ὀξεῖαν ἴσην· ἄρα

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\beta}{\alpha}.$$



Σχ. 696.

Μετὰ τὴν μελέτην τοῦ IV Βιβλίου, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἀπόδειξιν: Τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς αα′ ἢ ββ′, ἢ

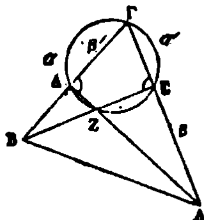
$$2\,E = \alpha\alpha' = \beta\beta' \cdot \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Θεώρημα 334

1152. **Δύο τυχοῦσαι πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην.**

Ἔστωσαν α′ καὶ β′ αἱ προβολαὶ τῆς α ἐπὶ τὴν β καὶ τῆς β ἐπὶ τὴν α ἀντιστοίχως. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΑ καὶ ΓΒΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην. Ἑπομένως

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$



Σχ. 697.

Θεώρημα 334—I

1153. **Τὰ γινόμενα ΑΓ.ΑΕ καὶ ΑΔ.ΑΖ, τὰ ὁριζόμενα κατὰ τὸ σχῆμα 697, εἶναι ἴσα.**

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΓΔΖΕ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἑπομένως ΑΓ.ΑΕ = ΑΔ.ΑΖ. Βλ. ἐπίσης *Μέθοδοι*, § 292, ζ.

Θεώρημα 334—II

1154. **Ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὑψῶν τριγώνου, τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ ὁρίζει δύο τμήματα τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ τρία ὕψη.**

(*Μέθοδοι*, § 292, η).

Σημείωσις. ***Κύκλος τῶν ὑψῶν*** ὀνομάζεται ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο προηγουμένων τμημάτων ἐπὶ ἑκάστου ὕψους.

Ἡ περιφέρεια αὕτη ἔχει διαφόρους ἰδιότητας, ἀναφερομένας εἰς N. *Annales de Mathématiques* ὑπὸ τῶν Steiner, Serret, Mention (1849, σ. 453· 1850 σ. 5· 1864, σ. 535). Ἰδιαιτέρως, εἶναι ὁ τόπος

τῶν κέντρων τῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν, τῶν ἐφαπτομένων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (Θεώρημα τοῦ Mention, N. A. 1865, σ. 30).

Θεώρημα 334—III

1155. Ἐκ δοθέντος σημείου Μ φέρομεν καθέτους ΜΒ, ΜΓ ἐπὶ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας Α καὶ προεκτείνομεν αὐτὰς ἕως ὅτου ἑκάστη συναντήσῃ καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Δείξατε τὰς σχέσεις

$$ΑΒ \cdot ΑΕ = ΑΓ \cdot ΑΔ$$

καὶ $ΜΒ \cdot ΜΔ = ΜΓ \cdot ΜΕ.$

Σχ. 698.

Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΒΓΔΕ. Ἐπίσης:

$$ΔΑ \cdot ΔΓ = ΔΜ \cdot ΔΒ, \quad ΕΑ \cdot ΕΒ = ΕΜ \cdot ΕΓ.$$

Θεώρημα 334—IV

1155 α. Ἑκάστη τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων παντὸς τριγώνου διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου εἰς δύο τμήματα. 1) Τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν περιεχουσῶν τὴν διχοτόμον πλευρῶν πρὸς τὴν τρίτην πλευράν. 2) Τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὅλην διχοτόμον, ὃν τὸ ἄθροισμα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου. 3) Εἰς τὰ τρίγωνα σταθερᾶς περιμέτρου καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν εἶναι ἐπίσης σταθερὸν μῆκος, ἡ προβολὴ τῆς ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχομένης διχοτόμου ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἶναι τμῆμα σταθεροῦ πάλιν μήκους.

Σχ. 698 α

Ἔστω Ι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

1) Ἐκ τῶν διχοτόμων ΒΙ, ΓΙ, ἔχομεν:

$$\frac{ΑΙ}{ΙΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{ΑΓ}{ΓΔ}.$$

ὅθεν $$\frac{ΑΙ}{ΙΔ} = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{ΒΓ}. \qquad (1)$$

2) Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγομεν

$$\frac{ΑΙ}{ΑΔ} = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ} = \frac{β + γ}{2Τ}. \qquad (2)$$

3) Ἔστω ΙΚ ἡ ἀκτὶς εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μετὰ τῆς ΑΒ καὶ

ΑΡ ἡ προβολὴ τῆς διχοτόμου ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτήν. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{AP}{AK}=\frac{A\Delta}{AI}=\frac{2\tau}{\beta+\gamma},$$

$$AP=AK\,.\,\frac{2\tau}{\beta+\gamma},$$

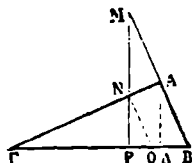
καὶ ἐπειδὴ $AK=\tau-\alpha$,

$$AP=\frac{2\tau\,.\,(\tau-\alpha)}{\beta+\gamma},$$

δηλ. ποσότης σταθερά, ἀφοῦ τὰ 2τ καὶ $\beta+\gamma$ ὑπετέθησαν σταθερὰ μήκη.

Θεώρημα 335

1156. **Ἐὰν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου φέρωμεν κάθετον ΡΜΝ, τέμνουσαν τὰς καθέτους πλευρὰς εἰς Μ καὶ Ν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς Ρ, τὸ γινόμενον ΡΜ . ΡΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης, εἰς ἃ διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τοῦ Ρ.**



Σχ. 699.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΜΒ καὶ ΡΓΝ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ αἱ γωνίαι Μ καὶ Γ αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἄρα

$$\frac{PM}{PB}=\frac{P\Gamma}{PN}\quad \text{ἢ}\quad PM\,.\,PN=PB\,.\,P\Gamma.$$

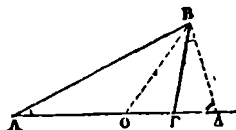
1156 α. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἐὰν Β,Γ καὶ Ρ εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ Μ, Ν μεταβλητά, ὥστε $PM\,.\,PN=PB\,.\,P\Gamma=\kappa^2$, ὁ τόπος τῶν τομῶν Α τῶν εὐθειῶν ΒΜ, ΓΝ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΒΓ.

2) Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΑΒΡΝ καὶ ΜΑΡΓ, πορίζόμεθα ἀκόμη τὰς σχέσεις

$$MA\,.\,MB=MN\,.\,MP\quad \text{καὶ}\quad NA\,.\,N\Gamma=NM\,.\,NP.$$

Θεώρημα 335—I

1157. **Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς Β τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν εὐθεῖαν ΒΔ μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ τέμνουσαν αὐτήν, ἢ τὴν προέκτασίν της, εἰς τρόπον, ὥστε γων. ΓΒΔ = ΓΑΒ, ἡ πλευρὰ ΒΔ θὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων ΑΔ καὶ ΓΔ.**



Σχ. 700.

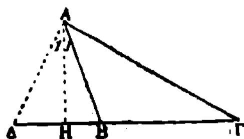
Ἐκ τῶν ἰσογωνίων καὶ ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΒΓΔ, ἕπεται:

$$\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\quad \text{ἢ}\quad B\Delta^2=A\Delta\,.\,\Gamma\Delta.$$

Θεώρημα 336

1158. **Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου**

εἶναι μία ὀρθὴ γωνία, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν βάσιν ὁ πούς αὐτοῦ.



Σχ. 701.

Ἔστω $\widehat{ΑΒΓ} - \widehat{Γ} = 90^\circ$.

Ἄς λάβωμεν ΗΔ = ΗΒ. Θὰ ἔχωμεν

γων. ΗΑΔ = ΗΑΒ = Γ,

ἄρα

ΔΑΓ = 90°

καὶ

$ΑΗ^2 = ΗΔ . ΗΓ = ΗΒ . ΗΓ$.

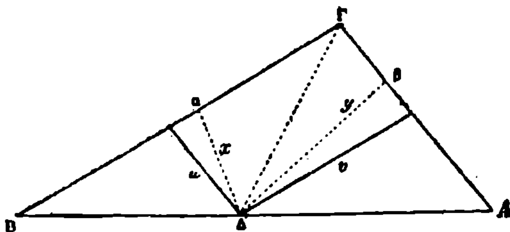
Θεώρημα 337

1159. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, αἱ παράλληλοι x, y πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ΒΓ καὶ περατούμεναι εἰς τὰς πλευρὰς αὐτάς, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ἀριθμοὺς ἀναλόγους τῶν μηκῶν τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν. Δηλ. ἐὰν $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu}$, θὰ εἶναι καὶ $\nu x + \mu y =$ σταθ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 271).

Θεώρημα 337—I

1160. Ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς καὶ περατουμένας εἰς αὐτάς. Τὸ ἄθροισμα τῶν λόγων τῶν οὕτω λαμβανομένων τμημάτων πρὸς τὴν πλευρὰν πρὸς ἣν ἕκαστον εἶναι παράλληλον, εἶναι ποσότης σταθερά.



Σχ. 702.

$$\frac{u}{β} = \frac{ΒΔ}{ΒΑ}, \quad \frac{v}{α} = \frac{ΔΑ}{ΑΒ} \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \frac{u}{β} + \frac{v}{α} = \frac{ΒΔ + ΔΑ}{ΒΑ} = 1.$$

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς ἄξονας Γu, Γv κατὰ τὰς πλευρὰς ΓΑ καὶ ΓΒ.

Θεώρημα 337—II

1160 α. Ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως τριγώνου φέρομεν τὰς καθέτους ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λόγων ἑκάστης ἀποστάσεως διὰ τῆς πλευρᾶς πρὸς ἣν δὲν εἶναι κάθετος εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta., \qquad (1)$$

ἐπειδὴ αἱ κάθετοι x, y εἶναι εὐθέως ἀνάλογοι τῶν μηκῶν u καὶ v τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Ἡ σταθερὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας Γ καὶ εἶναι εὔκολον νὰ τὴν ὑπολογίσωμεν, ἀφοῦ

$$u = \frac{x}{\eta\mu\,\Gamma}, \quad v = \frac{y}{\eta\mu\,\Gamma},$$

καὶ ἡ σχέσις

$$\frac{u}{\beta} + \frac{v}{\alpha} = 1$$

γίνεται

$$\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = \eta\mu\,\Gamma,$$

ἢ καὶ

$$\alpha x + \beta y = \alpha\beta\,\eta\mu\,\Gamma = 2\,E, \qquad (2)$$

ὅπου Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Καὶ ἀπ' εὐθείας θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐφθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν (2), παρατηροῦντες ὅτι αx καὶ βy εἶναι τὰ διπλάσια τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΓΔΒ καὶ ΓΔΑ. Ἄρα

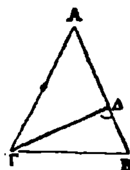
$$\alpha x + \beta y = 2\,.\,AB\Gamma = 2\,E.$$

Θεώρημα 337—ΙΙΙ

1161. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ ΓΔ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς

$$\Delta B^2 + 2\,\Delta A^2 + 3\,\Delta\Gamma^2.$$

Ἐπειδή:



Σχ. 703.

$$\Gamma B^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$$

$$A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta A^2$$

$$AB^2 = A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta A^2 \quad \text{καὶ}$$

$$AB^2 + A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = \Delta B^2 + 2\,\Delta A^2 + 3\,\Delta\Gamma^2.$$

Θεώρημα 338

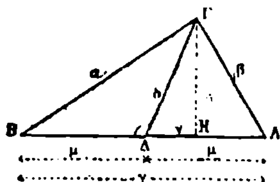
1162. 1) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστοίχων προβολῶν των ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.

Ἔστωσαν α, β αἱ πλευραί, α', β' αἱ προβολαὶ των ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν· θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2 - \beta^2 = \alpha'^2 - \beta'^2.$$

Θεώρημα 339

1163. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τῆς προβολῆς ἐπ' αὐτὴν τῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων πλευρῶν περιεχομένης διαμέσου.



Σχ. 704.

Πράγματι, εἰς τὸ τρίγωνον ΓΒΔ ἔχομεν

$$\alpha^2 = \delta^2 + \mu^2 + 2\,\mu\nu, \qquad (1)$$

εἰς δὲ τὸ ΓΔΑ

$$\beta^2 = \delta^2 + \mu^2 - 2\,\mu\nu \qquad (2)$$

Ἐξ ἀφαιρέσεως λαμβάνομεν:

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4\,\mu\nu = 2\,\gamma\nu.$$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\nu = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$. Ἐὰν ἡ πλευρὰ γ καὶ ἡ διαφορὰ $\alpha^2 - \beta^2$ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, τὸ μῆκος ν εἶναι ἐπίσης σταθερόν. Ἑπομένως, ὁ τόπος τῶν σημείων Γ, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι σταθερὰ ποσότης, εἶναι εὐθεῖα ΗΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς Δ

$$\Delta H = \nu = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma} = \text{σταθ.}$$

Ὁ τόπος οὗτος εἶναι ἤδη γνωστὸς (§ 71)· ἀλλὰ χρήσιμον εἶναι νὰ ἀποδεικνύωμεν τὰς προτάσεις διὰ διαφόρων τρόπων.

Θεώρημα 339—Ι

1164. Δύο τρίγωνα δύνανται νὰ ἔχουν τρεῖς γωνίας ἴσας καὶ δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ πλευραὶ x, y, z τοῦ πρώτου καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ὁμόλογοι, y, z, u τοῦ δευτέρου θὰ εὑρίσκωνται κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον, ἤ

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u}.$$

Ὁ λόγος τῆς προόδου αὐτῆς πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ἐξαιρουμένης τῆς μονάδος.

Λ. χ. ὡς ὁμολόγους πλευρὰς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν

	8	12	18	
ἤ	12	18	27	κλπ.

Σημείωσις. Τὸ ξενίζον πως θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν ἀββᾶν Gelin. (*Nouv. correspondance mathématique*, 1876, σ. 338).

Θεώρημα 340

1165. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, το γινόμενον τῶν ὑποτεινουσῶν αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. (Dostor, N. A., 1869, σ. 433).

Ἔστωσαν α, β, γ καὶ α', β', γ', αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς καὶ αἱ ὁμόλογοι πρὸς αὐτὰς τοῦ ἄλλου. Ἐὰν μ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος,

$$\alpha' = \alpha\mu, \quad \beta' = \beta\mu, \quad \gamma' = \gamma\mu.$$

Ἡ δεικτέα σχέσις

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

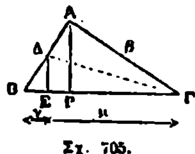
$$\alpha\alpha\mu = \beta\beta\mu + \gamma\gamma\mu,$$

καὶ ἀληθεύει, ἀφοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν γνωστὴν

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Θεώρημα 340—I

1166. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τμημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.



Σχ. 705.

Ἔστω ΑΔ = ΔΒ, ΕΓ = μ, ΕΒ = ν. Εἶναι

$$\mu^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta E^2,$$
$$\nu^2 = \Delta B^2 - \Delta E^2.$$

ἄρα

$$\mu^2 - \nu^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta A^2 = \beta^2,$$

Θεώρημα 340—II

1166 α. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἐγγράφομεν περιφέρειαν εἰς ἕκαστον τῶν δύο σχηματισθέντων τριγώνων ὡς καὶ εἰς τὸ ἀρχικόν. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τούτων εἰς τὰ δύο πρῶτα τρίγωνα ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τὴν τρίτην περιφέρειαν. (A. Silva).

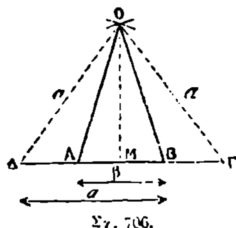
Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ συνδέοντα τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ΑΒΓ περιφερείας, μετὰ τῶν τριῶν κέντρων εἶναι ἴσα, τὰ δὲ ἄκρα τμήματα εἶναι κάθετα μεταξύ των. Ἄρα... (*Revista de Matematicas, Santiago*, 1904, σ. 245).

Παρατήρησις. Τὸ σχῆμα τῆς προτάσεως αὐτῆς ὁδηγεῖ εἰς διάφορα στοιχειώδη θεωρήματα. Βλ. ἐπίσης §§ 742, 1599.

Θεώρημα 340—III

1167. Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μέσου ἀναλόγου τμήματος δύο δοθέντων μηκῶν α καὶ β, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας λαμβάνομεν μῆκος ΑΒ = β < α *καί, ἑκατέρωθεν αὐτοῦ, μήκη* ΑΒΓ = ΒΑΔ = α. *Μὲ κέντρα τὰ* Γ *καὶ* Δ *καὶ ἀκτῖνα* α *γράφομεν τόξα τεμνόμενα εἰς* Ο. *Τὸ μῆκος* ΟΑ = ΟΒ *εἶναι τὸ ζητούμενον μέσον ἀνάλογον τῶν* α *καὶ* β. (Ν. Α. 1857, σ. 125).



Σχ. 706.

Ἄς φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΜ. Θὰ ἔχωμεν

$$OA^2 = MA^2 + MO^2,$$

$$AM^2 = \frac{\beta^2}{4},$$

$$MO^2 = \Delta O^2 - \Delta M^2 = \alpha^2 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 = $$

$$= \alpha\beta - \frac{\beta^2}{4}.$$

Ἐπομένως:

$$MA^2 + MO^2 = OA^2 = \alpha\beta.$$

1167 α. Σημείωσις. Ἡ κατασκευὴ αὕτη, ἀρκετὰ ἁπλουστέρα τῆς κλασικῆς, ὀφείλεται εἰς τὸν *Thomas Strode* (*J. M. E. καὶ Sp.*, 1885, σ. 159) καὶ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Wallis τὸ 1865.

Θεώρημα 341

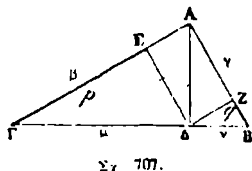
1168. **Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγώνου ὀρθογωνίου φέρωμεν τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ λόγος τῶν κύβων τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας τῶν δύο τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ποδὸς τοῦ ὕψους.**

Ἔστωσαν ΑΓ = β, ΑΒ = γ, ΔΓ = μ, ΔΒ = ν, ΓΕ = p, ΒΖ = q.

Ἔχομεν:

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta^4}{\gamma^4} = \frac{\mu^2}{\nu^2},$$

καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΔ, ΔΕΓ:



Σχ. 707.

$$\frac{\mu}{\beta} = \frac{p}{\mu}, \quad \mu^2 = p\beta.$$

Ἀναλόγως,

$$\frac{\nu}{\gamma} = \frac{q}{\nu}, \quad \nu^2 = \gamma q.$$

Ἄρα

$$\frac{\beta^4}{\gamma^4} = \frac{\beta p}{\gamma q} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta^3}{\gamma^3} = \frac{p}{q}.$$

Θεώρημα 341—Ι

1169. Ἔστω μ ἡ προβολὴ τῆς β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, μ_1 ἡ προβολὴ τῆς μ ἐπὶ τὴν β, μ_2 ἡ τῆς μ_1 ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κλπ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{\beta^3}{\gamma^3} = \frac{\mu_1}{\nu_1}, \quad \frac{\beta^4}{\gamma^4} = \frac{\mu_2}{\nu_2} \ldots \frac{\beta^\kappa}{\gamma^\kappa} = \frac{\mu_{\kappa-2}}{\nu_{\kappa-2}}.$$

Θεώρημα 342

1170. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν δ, ε, ζ αἱ πρὸς τὰς πλευρὰς α, β, γ, ἀντιστοίχως, διάμεσοι. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$$2\delta^2 + \frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2$$

$$2\varepsilon^2 + \frac{\beta^2}{2} = \gamma^2 + \alpha^2$$

$$2\zeta^2 + \frac{\gamma^2}{2} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Ἄρα, διὰ προσθέσεως:

$$\delta^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Θεώρημα 342—I

1171. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ σταθερὰν ὑποτείνουσαν α, εἶναι ἐπίσης σταθερὰ ποσότης.

Ἐπειδή:

$$\delta^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \alpha^2) =$$

$$= \frac{3}{2}\alpha^2 = \text{σταθ. ποσότης}.$$

Θεώρημα 342—II

1171 α. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν διαμέσων τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ ὁμοίου ἀθροίσματος διὰ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. (E. Cesaro, *Mathesis*, 1882, σ. 115).

Ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων,

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, \\ 4\varepsilon^2 &= 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2, \\ 4\zeta^2 &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

δι᾽ ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ κατὰ μέλη προσθέσεως, λαμβάνομεν:

$$16(\delta^4 + \varepsilon^4 + \zeta^4) = 9(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) \qquad (2)$$

1171 β. Παρατήρησις. Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι:

$$4(\delta^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2) = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (2) καὶ (3), ἀφοῦ ὑψώσω-

μεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$16(\delta^2\varepsilon^2+\varepsilon^2\zeta^2+\zeta^2\delta^2)=9(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2).$$

Δηλ., τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γινομένων ἀνὰ δύο τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ ἀναλόγου ἀθροίσματος διὰ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

Σημείωσις. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ ἐδόθησαν κατὰ πρῶτον ὑπὸ τοῦ James Booth. (*Journal de Mathématiques élémentaires* τοῦ *Bourget*, 1879, σ. 272, nº 28).

Θεώρημα 342—III

1172. **Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας ταύτης, μεῖον τὸ ἔνατον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν.**

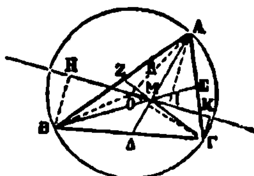
Ἂς προβάλωμεν τὰς κορυφὰς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ (Σχ. 708)· γνωρίζομεν ὅτι (§ 462, Παρατήρησις):

$$\text{MH}=\text{MI}+\text{MK}. \qquad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΜ, ἔχομεν $R^2=\text{MA}^2+\text{MO}^2+2\text{MO}.\text{MI}$

» ΒΟΜ » $R^2=\text{MB}^2+\text{MO}^2-2\text{MO}.\text{MH}$

» ΓΟΜ » $R^2=\text{M}\Gamma^2+\text{MO}^2+2\text{MO}.\text{MK}.$



Σχ. 708.

Προσθέτοντες κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1), εὑρίσκομεν

$$3R^2=\text{MA}^2+\text{MB}^2+\text{M}\Gamma^2+3\text{MO}^2.$$

Ἀλλ' εἶναι

$$\text{MA}=\frac{2}{3}\text{A}\Delta,\quad \text{MA}^2=\frac{4}{9}\text{A}\Delta^2 \text{ κλπ.}$$

Ἄρα

$$\text{MA}^2+\text{MB}^2+\text{M}\Gamma^2=\frac{3}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

ἀφοῦ, ὡς εἴδομεν, $\text{A}\Delta^2+\text{BE}^2+\Gamma\text{Z}^2=\frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$. Ἑπομένως

$$3\text{MO}^2=3R^2-\frac{3}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

ἢ

$$\text{MO}^2=R^2-\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

1172 α. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεώς του ΟΗ ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου (§ 1119). Ὥστε

$$\text{OH}^2=9R^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \qquad (2)$$

2) Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν τῆς § 130, 2), ὁδηγούμεθα εὐκόλως εἰς τὴν ἑπομένην: *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν*

τῶν τριγώνων, ἅτινα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον, ἢ τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους εἶναι ποσότης σταθερά.

Ἐπειδή: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9R^2 - OH^2$. (3)

1172 β. Σημείωσις. Ἡ σχέσις (2) δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας (*J. M. E.* τοῦ Longchamps, 1896, σ. 169, *Barbarin*, καθὼς καὶ τὸ ἔργον *Relation entre les Éléments d'un triangle* (2^e^ édition), σ. σ. 72 καὶ 82, τύποι 70 καὶ 84).

Εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν (1892, σ. 248) εὑρίσκεται καὶ μία μελέτη τοῦ A. Boutin: *Distances des points remarquables d'un triangle* (1892, σ. 248).

Θεώρημα τοῦ Stewart 343

1173. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, Δ τυχὸν σημεῖον [ἐσωτερικὸν] τῆς βάσεώς του ΒΓ καὶ μ, ν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ. Δείξατε τὴν σχέσιν

$$\alpha A\Delta^2 = \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 - \mu\nu\alpha,$$

ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως ([86]).

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἐπέκτασις τοῦ γνωστοῦ διὰ τὰς διαμέσους καὶ κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται.

Ἔστω δ τὸ μῆκος τῆς ΑΔ καὶ ΑΕ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ἔχομεν

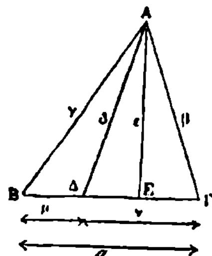
$$\gamma^2 = \delta^2 + \mu^2 + 2\mu\,\Delta E$$
$$\beta^2 = \delta^2 + \nu^2 - 2\nu.\Delta E.$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων τούτων ἐπὶ ν καὶ μ, ἀντιστοίχως, καὶ προσθέτομεν. Εὑρίσκομεν

$$\beta^2\mu + \gamma^2\nu = \delta^2(\mu + \nu) + \mu\nu(\mu + \nu) =$$
$$= \delta^2\alpha + \alpha\mu\nu.$$

Ἐπομένως,

$$\alpha\delta^2 = \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 - \mu\nu\alpha.$$



Σχ. 709.

1173 α. Σημείωσις. Ἡ σχέσις αὕτη ἀποδίδεται, κατὰ κανόνα, εἰς τὸν Stewart (*Aperçu historique*, σ. 175 καὶ *Histoire des Sciences Mathématiques*, ὑπὸ Maximilien Marie). Ὁ Carnot, εἰς τὴν *Γεωμετρίαν θέσεως* αὐτοῦ, δίδει τὸ ἴδιον θεώρημα. Φαίνεται ὅμως ὅτι ἀνήκει, πράγματι, εἰς τὸν Robert Simson. (*Int. d. Mathem.*, 1908, σ. σ. 160 καὶ 168).

Τὸ *θεώρημα τοῦ Stewart* προσφέρεται διὰ μέγα πλῆθος ἐφαρμογῶν. Βλέπε: *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre*, 1891, ὑπὸ C. Thiry.

---

86. Σημ. μετ. Διὰ τὴν γενίκευσιν τοῦ τύπου αὐτοῦ, διὰ τυχοῦσαν θέσιν τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ, θὰ πρέπει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν μ, ν νὰ λαμβάνεται ὡς θετικός, ἐφ' ὅσον ἡ φορὰ ΒΔ ἢ ΔΓ τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν φορὰν ΒΓ τῆς βάσεως. Ἄλλως θὰ λαμβάνεται ἀρνητικός.

Παράδειγμα: Διὰ τὴν *διάμεσον*, εἶναι $\mu = \nu = \frac{\alpha}{2}$· ὅθεν, διὰ διαιρέσεως κατὰ τὰ μέλη διὰ μ:

$$2\delta^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Διὰ τὴν *ἐσωτερικὴν διχοτόμον*: $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Τὸ θεώρημα τῆς παραγράφου 1174 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σχόλιον τοῦ ἀνωτέρω τοῦ *Stewart*.

Βλέπε ἐπίσης μίαν ὡραίαν στοιχειώδη σπουδὴν ἐπὶ τῶν ἐφαρμογῶν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἰς *Bulletin d. math. élém.*, τῶν Niewenglowski καὶ Gerard (1895-96, σ. σ. 113 καὶ 118 καὶ 1903-4, σ. 50).

Θεώρημα 343—I

1173 β. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν AB, ΓΔ καὶ AΔ, BΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ABΓΔ εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος R καὶ κέντρου O, θὰ εἶναι:

$$EZ^2 = OE^2 + OZ^2 - 2R^2. \qquad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ *Stewart* (Thiry).

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἕπεται καὶ ἡ ἀκόλουθος:

$$OE \,.\, OZ \,.\, \text{συν}\, EOZ = R^2, \qquad (2)$$

καὶ ἀντιστρόφως (Emmerich).

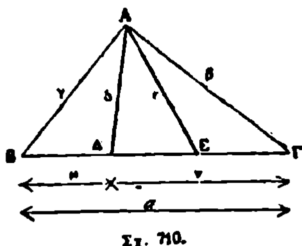
(*Mathesis*, 1902, σ. 52, question 1325).

Θεώρημα 343—II

1174. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ φέρονται αἱ συνδέουσαι τὴν κορυφὴν μὲ τὰ σημεῖα διαιρέσεως εὐθεῖαι. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

Διὰ $\mu = \frac{\alpha}{3}$ καὶ $\nu = \frac{2\alpha}{3}$, θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\delta^2 + \varepsilon^2 + \Delta E^2 = \frac{2}{3}\alpha^2.$$



Σχ. 710.

Ὁ γνωστὸς τύπος (§ 1173)

$$\delta^2\alpha = \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 - \mu\nu\alpha,$$

διὰ $\mu = \frac{\alpha}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}\alpha$ καὶ μετά τινας ἁπλοποιήσεις, γίνεται

$$\delta^2 = \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{2}{3}\gamma^2 - \frac{2}{9}\alpha^2.$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{1}{3}\gamma^2 - \frac{2}{9}\alpha^2.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{4}{9}\alpha^2.$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\Delta E^2 = \frac{\alpha^2}{9}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2,$$

ἕπεται

$$\delta^2 + \varepsilon^2 + \Delta E^2 = \alpha^2 - \frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{9},$$

ἢ

$$A\Delta^2 + \Delta E^2 + AE^2 = \frac{2}{3}\alpha^2.$$

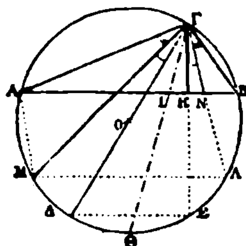
Θεώρημα 343—III

1175. Πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν Ο τριγώνου φέρομεν χορδὴν παράλληλον ΛΜ, καθὼς καὶ τὰς εὐθείας ΓΝΛ καὶ ΓΜ. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΓΜ . ΓΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΑ . ΓΒ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Γ.

Τὰ τρίγωνα ΒΓΝ, ΑΓΜ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια. Πράγματι, ἡ ἐγγεγραμμένη γων. Β = Μ καὶ γων. ΒΓΝ = ΑΓΜ· ἄρα

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma M} = \frac{\Gamma N}{\Gamma B},$$

ἢ $\Gamma A . \Gamma B = \Gamma M . \Gamma N.$



Σχ. 711.

1175 α. *Παρατήρησις.* Δύο γνωστὰ θεωρήματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ ἀνωτέρω:

1) *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.*

Πράγματι, ἡ γων. ΓΑΔ εἶναι ὀρθή, μὲ μέτρον τόξ. $\frac{\Gamma B + BE + E\Delta}{2}$, τὸ δὲ μέτρον τῆς Η εἶναι: τόξ. $\frac{\Gamma B + E\Delta + \Delta A}{2}$. Ἄρα τόξ. ΒΕ = ΔΑ, ἡ δὲ χορδὴ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· ἑπομένως

$$\Gamma A . \Gamma B = \Gamma\Delta . \Gamma H.$$

2) *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης ἐσωτερικῆς διχοτόμου, πολλαπλασιασμένης ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τῆς τρίτης πλευρᾶς, τῶν ὁριζομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς ἐν λόγῳ διχοτόμου.*

Ἐπειδὴ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τὸ μέσον Θ τοῦ τόξου ΑΘΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΘ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ. Αἱ εὐθεῖαι ἑπομένως ΓΜ, ΓΝ συμπίπτουν.

$$\text{Ἄρα}\quad \Gamma A \cdot \Gamma B = \Gamma I \cdot \Gamma\Theta = \Gamma I(\Gamma I + I\Theta) = \Gamma I^2 + \Gamma I \cdot \Gamma\Theta,$$

$$\text{ἢ}\quad \Gamma A \cdot \Gamma B = \Gamma I^2 + AI \cdot BI,$$

$$\text{ἀφοῦ}\quad \Gamma I \cdot I\Theta = AI \cdot BI.$$

Ἀνάλογος σχέσις εὑρίσκεται καὶ διὰ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον.

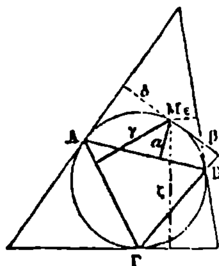
1175 β. Σημείωσις. 1) Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εὐκόλως διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: *Δύο ἰσογώνιοι, εὐθεῖαι, διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἑνὸς τριγώνου ἀγόμεναι καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία περατοῦται εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, ἔχουν γινόμενον σταθερόν.*

Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἰσογωνίων εὐθειῶν βλέπε § 1118.

2) Ἡ πρότασις αὕτη (1175 β), χρησιμοποιεῖται ὡς τὸ βασικὸν θεώρημα τῆς *Ἰσογωνίου Ἀντιστροφῆς*. (Βλ. ἐπμ. § 1342, γ). Ὁ μετασχηματισμὸς αὐτὸς εἶναι γνωστὸς ἀπὸ τοῦ 1890—1891 καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν Bernès. Ἐνωρίτερον, ὁ Gob εἶχεν δημοσιεύσει σχετικῶς εἰς *Association française pour l'avancement des sciences*. (*J.M.E.*, 1890, 1891, κλπ.).

Θεώρημα 344

1176. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῶν ἐπαφῶν.



Σχ. 712.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου καὶ δ, ε, ζ αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ μιᾶς χορδῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς αὐτῆς (§§ 25, 1129). Ὥστε

$$\alpha^2 = \delta\varepsilon,\quad \beta^2 = \varepsilon\zeta,\quad \gamma^2 = \zeta\delta,$$

$$\text{ἄρα}\quad \alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta.$$

Παρατήρησις. Θὰ ἠδυνάμεθα καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν αὐτήν, χρησιμοποιοῦντες τὰ γνωστὰ θεωρήματα τῶν παραγράφων 1175 α, 1) καὶ 1128.

$$\text{Οὕτω}\quad 2\rho\alpha = MA \cdot MB,\quad 2\rho\beta = MA \cdot M\Gamma,\quad 2\rho\gamma = MB \cdot M\Gamma$$

$$\text{καὶ}\quad 8\rho^3\alpha\beta\gamma = MA^2 \cdot MB^2 \cdot M\Gamma^2 \qquad (1)$$

$$\text{Ἀλλὰ}\quad 2\rho\delta = MA^2,\quad 2\rho\varepsilon = MB^2,\quad 2\rho\zeta = M\Gamma^2$$

$$\text{καὶ}\quad 8\rho^3\delta\varepsilon\zeta = MA^2 \cdot MB^2 \cdot M\Gamma^2. \qquad (2)$$

Ἐπομένως, διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2).

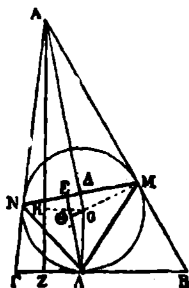
$$\alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta.$$

Θεώρημα 344—I

1177. Ἐὰν Λ, Μ, Ν εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας (Ο), ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΛΜΝ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἰδίων κορυφῶν ἀπὸ τῶν ἀπέναντι αὐτῶν πλευρῶν. (Salmon).

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι :

$$\frac{ΑΟ}{ΛΟ} = \frac{ΑΖ}{ΛΕ}.$$



Σχ. 713.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΗ, ΟΛΘ δίδουν

$$\frac{ΑΟ}{ΛΟ} = \frac{ΑΗ}{ΛΘ}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $ΑΟ . ΔΟ = ΟΜ^2 = ΟΛ^2$,

καὶ ἑπομένως

$$\frac{ΑΟ}{ΛΟ} = \frac{ΛΟ}{ΔΟ}. \qquad (2)$$

Τὰς ἀναλογίας (1) καὶ (2) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ κατὰ τὴν μορφήν:

$$\frac{ΑΟ}{ΛΟ} = \frac{ΛΟ}{ΔΟ} = \frac{ΑΗ}{ΛΘ},$$

ἐκ τῆς ὁποίας

$$\frac{ΑΟ}{ΛΟ} = \frac{ΛΟ + ΑΗ}{ΔΟ + ΛΘ} = \frac{ΑΖ}{ΛΕ}.$$

1177 α. Σημείωσις. Ἐφαπτομενικὸν (tangentiel) τρίγωνον. Οὕτω καλεῖται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας ΛΜΝ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου τριγώνου ΛΜΝ. Τὸ ἐφαπτομενικὸν τρίγωνον τοῦ ΛΜΝ εἶναι τὸ *πολικὸν τρίγωνον* αὐτοῦ πρὸς τὴν περιγεγραμμένην εἰς αὐτὸ περιφέρειαν.

Εἰς τὴν *Γεωμετρίαν τριγώνου* θεωροῦμεν συχνὰ τὸ *ἐφαπτομενικὸν τρίγωνον* ΑΒΓ, ὡς καὶ τὸ *τρίγωνον τῶν ἐπαφῶν* ΛΜΝ.

Θεώρημα

1178. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ περιφερείας φέρομεν τυχοῦσαν χορδήν, τέμνουσαν σταθερὰν χορδὴν εἰς Α καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς εἰς Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΜΒ . ΜΓ}{ΜΑ^2}$ εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.

(*Μέθοδοι*, § 290)

Θεώρημα 345—I

1179. Θεωροῦμεν τυχὸν τρίγωνον καὶ τὸ τρίγωνον τῶν ἐπαφῶν τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν διὰ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας φέρωμεν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (Ε), τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τῶν σημείων τομῆς τῆς (ε) καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἔχει

λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ ἰδία εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ ἑτέρου τριγώνου, ἴσον πρὸς σταθερὸν ἀριθμόν.

Θεώρημα 345—II

1180. Διὰ τυχόντος σημείου τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας φέρομεν τέμνουσαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Δείξατε, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν σημείων τομῆς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἐπαφῆς ἔχει λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου, ἀριθμὸν σταθερόν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐπεκταθῇ εἰς ἓν τυχὸν περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον ἐγγεγραμμένον τῶν σημείων ἐπαφῆς, ἀποδεικνύεται δὲ κατ' ἀνάλογον τρόπον ὅπως καὶ διὰ τὸ θεώρημα τῆς ἀσκήσεως 344 ἀλλὰ χρησιμοποιοῦντες καὶ τὴν πρότασιν τῆς ἀσκήσεως 345 (§§ 1176 καὶ 1178.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀπὸ τῶν σημείων τομῆς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου καὶ τῆς δι' αὐτοῦ τεμνούσης, δ, ε, ζ αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τῶν σημείων ὅπου ἡ τέμνουσα συναντᾷ τὰς πλευρὰς τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ λ, μ, ν σταθεροὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\frac{\alpha^2}{\delta\varepsilon} = \lambda, \quad \frac{\beta^2}{\varepsilon\zeta} = \mu, \quad \frac{\gamma^2}{\zeta\delta} = \nu$$

καὶ

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon\zeta} = \sqrt{\lambda\mu\nu}.$$

1181. Παρατηρήσεις. 1) Αἱ σταθεραὶ ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς τεμνούσης.

2) Παριστῶντες διὰ α', β', γ', δ', ε', ζ' τὰς ἀποστάσεις τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ' τῆς διὰ τοῦ Μ τεμνούσης καὶ τῆς περιφερείας, ἀπὸ τῶν ἰδίων, ὡς καὶ προηγουμένως, κοινῶν σημείων τῆς τεμνούσης καὶ τῶν πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon\zeta} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\delta'\varepsilon'\zeta'},$$

οἱασδήποτε οὔσης τῆς διευθύνσεως τῆς τεμνούσης.

Θεώρημα τοῦ Euler 346

1182. Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἡ ἀπόστασις δ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης, συνδέεται μετὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων διὰ τῆς σχέσεως

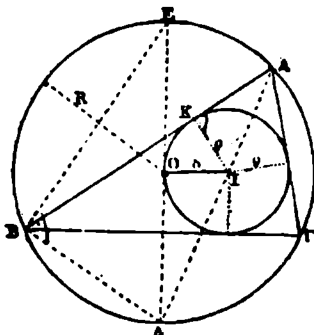
$$\delta^2 = R\,(R - 2\,\varrho).$$

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 327 καὶ *J. M. E.* τοῦ Longchamps, 1895, σ. 198).

1182 α. Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἡ διχοτόμος ΑΙΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΒΔΓ καὶ γνωρίζομεν ὅτι ΔΙ = ΔΒ = ΔΓ (§ 701 Παρατήρησις καὶ § 816, Παρατήρησις). Θὰ ἔχωμεν

$$R^2 - \delta^2 = AI \cdot I\Delta = AI \cdot B\Delta.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΔΕ καὶ τὴν ἀκτῖνα ΙΚ, τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΚ καὶ ΒΔΕ δίδουν



Σχ. 714.

$$\frac{AI}{\rho} = \frac{2R}{B\Delta}, \quad AI \cdot B\Delta = 2R\rho$$

καὶ ἑπομένως,

$$R^2 - \delta^2 = 2R\rho \text{ ἢ } \delta^2 = R(R - 2\rho).$$

Ἀντίστροφον θεώρημα 346—Ι

1182 β. *Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀκτίνων R καὶ ρ δύο περιφερειῶν (Ο), (Ι) καὶ τῆς ἀποστάσεως ΟΙ = δ τῶν κέντρων αὐτῶν ὑφίσταται ἡ σχέσις*

$$\delta^2 = R(R - 2\rho),$$

ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων, ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὴν (Ι).

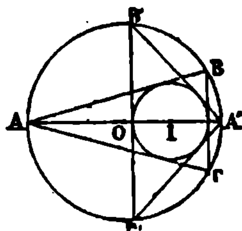
Διὰ τυχόντος σημείου Α τῆς περιφερείας (Ο) φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ πρὸς τὴν περιφέρειαν (Ι).

Τὸ κέντρον Ι εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ἡ σχέσις $\delta^2 = R^2 - 2R\rho$ δεικνύει ὅτι ΑΙ . ΙΔ = 2Rρ τὰ δὲ τρίγωνα ΑΙΚ, ΒΕΔ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ΑΙ . ΙΔ = 2Rρ. Εἶναι λοιπὸν ΔΙ = ΔΒ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον Ι εἶναι κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου. Ἢ, ἄλλως, ἡ ΒΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Ι) καὶ τοῦτο οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Α. Ἄρα...

1182 γ. ***Σημειώσεις.*** 1) Αἱ ἀνωτέρω ἀποδείξεις τοῦ *θεωρήματος τοῦ Euler* καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του ἐρανίσθησαν ἐκ τοῦ *Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires* (1903, σ. 194, 2ᵒ).

Μία ὡραία στοιχειώδης μελέτη ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῆς γενικεύσεώς του εὑρίσκεται εἰς *Journal de Mathématiques élémentaires* τοῦ Vuibert (1902—1903, σ. 57).



Σχ. 715.

2) Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἑπόμενον πρόβλημα: *Ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) καὶ περιγεγραμμένων εἰς τὴν (Ι) τριγώνων, ποῖον τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ἐμβαδόν;*

Συμφώνως πρὸς μίαν προγενεστέραν παρατήρησιν (§ 573), ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ὡς κορυφὰς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΟΙΑ′ (Σχ. 715).

Τὸ μέγιστον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, μὲ ἐμβαδὸν

$$E = (R + \rho + \delta)\sqrt{R^2 - (\delta + \rho)^2}$$

καὶ τὸ ἐλάχιστον τὸ Α′Β′Γ′, μὲ ἐμβαδὸν

$$E' = (R + \rho - \delta)\sqrt{R^2 - (\delta - \rho)^2}.$$

(A. Boutin)

(*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904, σ. 248 — 252· διάφοροι λύσεις ὑπὸ Weinmeister, Mathieu, Malo, Boutin).

3) Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν διαφόρους ἰδιότητας· διάφοροι ποσότητες ἐμφανίζονται εἰς αὐτὰ ὡς σταθεραί. Λ.χ. αἱ

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\tau}, \quad \frac{E}{\tau}, \quad AH + BH + \Gamma H,$$

$$\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma, \quad \frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}, \quad \frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma}.$$

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων, τὸ ὀρθόκεντρον καὶ τὸ κέντρον βάρους γράφουν περιφερείας.

(*Mathesis*, 1901, σ. 271, n° 22).

4) Τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχονται αἱ περίμετροι τῶν τριγώνων αὐτῶν ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων

$$2R^2 + 10R\rho - \rho^2 - 2(R - 2\rho)\sqrt{R^2 - 2R\rho} < \tau^2$$

$$< 2R^2 + 10R\rho - \rho^2 + 2(R - 2\rho)\sqrt{R^2 - 2R\rho}.$$

(N. A. 1908, σ. 558).

Θεώρημα 346—II

1183. Ἐὰν ϱ_α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς παρεγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εἰς τὴν γωνίαν Α περιφερείας καὶ δ_α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου της ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\delta^2_\alpha = R(R + 2\varrho_\alpha).$$

(*Μέθοδοι*, § 327, β).

1183 α. Σημείωσις. Ἡ *σχέσις τοῦ Euler* εἶναι τὸ πρῶτον βῆμα ἐπὶ μιᾶς ὁδοῦ τὴν ὁποίαν ἐπιφανεῖς γεωμέτραι ἠκολούθησαν κατόπιν. Πρόκειται περὶ τῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς δύο δοθείσας περιφερείας ἤ, γενικώτερον, εἰς δύο κωνικὰς τομάς. Τὸ 1792 ὁ Nicolas Fuss ἐπεζήτησε νὰ λύσῃ τὸ ὁμώνυμον πρὸς αὐτὸν πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰς ἀκτῖνας καὶ τὴν διάκεντρον δύο περιφερειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη εἰς δοθὲν πολύγωνον. Δὲν ἐπέτυχεν ὅμως τὴν λύσιν παρὰ δι' εἰδικάς τινας περιπτώσεις.

Ὁ Poncelet ἀργότερον, κατὰ τὸ 1817 - 1822, ἐπεξειργάσθη γεωμετρικῶς τὸ πρόβλημα τῆς ἐγγραφῆς καὶ περιγραφῆς ἑνὸς πολυγώνου εἰς δύο δοθείσας κωνικὰς τομὰς καὶ τὸ ἐπέλυσε ἐν ὅλῃ τῇ γενικότητι αὐτοῦ.

Τὸ 1828, ὁ Jacobi ἐπελήφθη τοῦ αὐτοῦ προβλήματος ἀπὸ ἀναλυτικῆς σκοπιᾶς.

Ὁ Moutard (1862) εἰργάσθη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος ἀλλὰ κατὰ γενικὸν τρόπον. (*Applications d'analyse et de Géométrie*, ὑπὸ Poncelet, τόμ. I, σημ. 3, σ. 535).

Θεώρημα 346—III

1184. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς αὐτὸ ἀπὸ τῶν τεσσά-

ρων κύκλων τῶν ἐφαπτομένων τῶν τριῶν πλευρῶν του, ἰσοῦται πρὸς τὸ δωδεκαπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἐπειδὴ

$$\delta^2 = R(R - 2\rho),$$

$$\delta_\alpha{}^2 = R(R + 2\rho_\alpha),$$

$$\delta_\beta{}^2 = R(R + 2\rho_\beta),$$

$$\delta_\gamma{}^2 = R(R + 2\rho_\gamma),$$

$$\delta^2 + \delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 = R(4R + 2\rho_\alpha + 2\rho_\beta + 2\rho_\gamma - 2\rho).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν § 736, τὸ ἄθροισμα $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = 4R$.

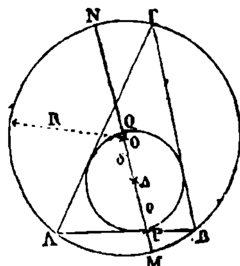
Ἄρα $\delta^2 + \delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 = R(4R + 8R) = 12R^2$.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ἀνήκει εἰς τὸν ἀνώνυμον, συντάκτην L.P.F.R. ἑνὸς ἐνδιαφέροντος ἄρθρου εἰς *An. d. Gerg.*, τομ. XIX, 1828—1829, σ. 216.

Εἰς τὸ ἄρθρον τοῦτο ὑποδεικνύονται καὶ ἄλλαι σχέσεις, σελ. 211—218.

Θεώρημα 346—IV

1185. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κοινὴν διάμετρον ΜΝ τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας θὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων ΜΡ, ΝQ, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν. (N. A. 1850, σ. 216).



Σχ. 716.

Ἔστωσαν

$$ON = OM = R,\ O\Delta = \delta,\ \Delta Q = \Delta P = \rho,$$

$$MP = OM - O\Delta - \Delta P = R - \rho - \delta,$$

$$NQ = N\Delta - \Delta Q = R - \rho + \delta,$$

$$MP \, . \, NQ = (R - \rho)^2 - \delta^2.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Euler,

$$\delta^2 = R^2 - 2R\rho,$$

καὶ ἑπομένως:

$$MP \, . \, NQ = R^2 - 2R\rho + \rho^2 - (R^2 - 2R\rho) = \rho^2.$$

Παρατηρήσεις. 1) $MQ \, . \, IP = 4R\rho + \rho^2$.

2) Παριστῶντες διὰ Δ καὶ Δ′ τὰς δυνάμεις τῶν σημείων P καὶ Q πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, λαμβάνομεν σχέσιν ὀφειλομένην εἰς τὸν Grunert:

$$\Delta \, . \, \Delta' = \rho^2 (4R + \rho).$$

(*Nouv. Annales*, 1858, σ. 447).

1185 α. ***Σημείωσις.*** *Ἀριθμητικαὶ σχέσεις.* Ἡ ἕκτη ἔκδοσις τῶν *Théorèmes et problèmes* τοῦ *Catalan* περιέχει μέγα πλῆθος ἀριθμητικῶν σχέσεων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς πληρέστερον δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ ἔργον τοῦ Vuibert: *Relations entre les Éléments du triangle* (1893), περιέχον περὶ τὰς 273 σχέσεις, μετὰ τῶν ἀποδεί-

ξεών των, άναφερομένας είς ό,τι πλέον ένδιαφέρον παρουσιάζει ή κλασική Γεωμετρία σχετικῶς πρὸς τὸ τρίγωνον.

Εἰς διάφορα ἄρθρα τοῦ *Journal de mathématiques élémentaires* τοῦ G. de Longchamps ὑπάρχουν πολυάριθμοι σχέσεις ἐπὶ τῆς *Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου*· τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν *Mathesis*, ὡς καὶ διὰ τὰ ἔργα τοῦ Casey καὶ τοῦ Emmerich (*A sequel of the first six Books of the Elements of Euclid*, by John Casey καὶ *Die Brocardschen Gebilde*, von Dr Emmerich).

Θεώρημα 346— V

1185 β. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἀπειρίαν τριγώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν καὶ πληρούντων μίαν τῶν ἑπομένων συνθηκῶν.

1) Νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν· 2) τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον· 3) τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους· 4) τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ Lemoine.

1) Ἐὰν δοθοῦν δύο περιφέρειαι (Ο) καὶ (Δ) (Σχ. 716), τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες R καὶ ρ καὶ ἡ διάκεντρος δ πληροῦν τὴν σχέσιν

$$\delta^2 = R\,(R - 2\rho),$$

πᾶσα ἐφαπτομένη ΑΒ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας ὁρίζει τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (Ο) (§ 1182 α).

2) *Τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον*. (Βλ. § 130, 2)).

3) *Τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους*. Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΘΜ διὰ τοῦ δοθέντος κέντρου βάρους Θ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης

$$\Theta M = \frac{1}{2}\, A\Theta .$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἓν τῶν ζητουμένων τριγώνων, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Μ χορδὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ.

Ἡ χορδὴ ΑΘΑ΄ ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς δευτέρου τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.

Σχ. 717.

4) *Τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ* Lemoine. (Βλ. ἐπμ. § 2442).

Παρατηρήσεις. 1) Τὰ σημεῖα Μ, Μ΄ κατασκευάζονται εὐκολώτερον λαμβάνοντες $\Theta P = \frac{O\Theta}{2}$ καὶ γράφοντες τὴν περιφέρειαν $\left(P, \frac{R}{2}\right)$· ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ ἢ Μ΄.

2) *Ἡ περιφέρεια τῶν ἴσων ῥοπῶν* ἢ *τῶν ὀκτὼ σημείων* (§ 2411), ἡ ἔχουσα ΟΘ ὡς διάμετρον, εἶναι κοινὴ εἰς πάντα τὰ τρίγωνα, ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ διέρχεται διὰ τῶν ὀκτὼ σημείων τῶν σχετικῶν πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.

3) *Τὰ τρίγωνα* ΑΒΓ *ἔχουν πάντα τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον*, ἀφοῦ $O\Theta = \frac{OH}{3}$ καὶ τὸ σημεῖον Η σταθερὸν ἑπομένως.

4) Ἐπίσης, τὸ *ἄθροισμα* τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῶν ἰδίων τριγώνων εἶναι *σταθερὰ ποσότης*. Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς $9(R^2 - O\Theta^2)$.

Βλ. § 1172 καὶ *Journal de Mathématiques* τοῦ *Vuibert*, 1902-1903, σ. 117, n° 5413.

Θεώρημα 346 — VI

1185 γ. Ὁ τόπος τῶν κέντρων I_a, I_β, I_γ, τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν (Ο) καὶ τὴν αὐτὴν ἐγγεγραμμένην (Ι), εἶναι περιφέρεια *ὁμαιόθετος* τῆς (Ο) καὶ μὲ *διπλασίαν ἀκτῖνα* 2R.

Πράγματι, τὸ κέντρον Ι εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου I_a I_β I_γ καὶ τὸ κέντρον Ο κέντρον τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου τούτου. Κατὰ συνέπειαν, ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρεια (Γ) εἶναι ὁμοιόθετος τῆς περιφερείας (Ο) καὶ τὸ σημεῖον Ο διαιρεῖ τὸ τμῆμα ΙΓ εἰς δύο ἴσα μέρη.

(*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1901, σ. 289, n° 2056. Ph. Weinmeister, Ernest Duporcq).

Θεώρημα 346 — VII

1185 δ. Ὁ τόπος τῶν ὀρθοκέντρων τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς δύο δοθείσας περιφερείας τριγώνων, ἀκτίνων R καὶ ρ, εἶναι περιφέρεια ἀκτῖνος $\frac{R}{2} - \rho$. (G. Salmon).

Τὸ κέντρον βάρους τῶν τριγώνων αὐτῶν γράφει περιφέρειαν ἐπίσης.

(Βλέπε Ν. Α. 1861, σ. 96, ζήτ. 527 (J. Mention καὶ Trousens).

Ἀριθμητικαὶ σχέσεις εἰς τὸ Τετράπλευρον

1186. Ἡ σπουδὴ τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων εἰς τὸ τετράπλευρον παρουσιάζει πολὺ ἐνδιαφέρον, ἕνεκα τῶν ἐφαρμογῶν των εἰς τὰ *ἀρθρωτὰ συστήματα*.

Ἓν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραὶ δὲν εἶναι τελείως ὡρισμένον· ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ τὸ παραμορφόσωμεν, πλησιάζοντες ἢ ἀπομακρύνοντες τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ἀπ' ἀλλήλων. Αἱ δὲ σχέσεις, αἵτινες συνδέουν ὡρισμένα σταθερὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ἢ τῶν διαγωνίων δύνανται νὰ ὁδηγήσουν ἐνίοτε εἰς μετασχηματισμὸν μιᾶς δοθείσης κινήσεως εἰς ἄλλην ἐπίσης δοθεῖσαν ([66]).

Θὰ ἀναφέρωμεν τὰ ἁπλούστερα καὶ μᾶλλον ἐνδιαφέροντα παραδείγματα, μελετῶντες κατὰ πρῶτον τὸ παραλληλόγραμμον— εἰδικὴ τοῦ ὁποίου περίπτωσις εἶναι ὁ ρόμβος—, τὸ τετράπλευρον κατόπιν μὲ ὀρθογωνίους διαγωνίους καὶ τὸ τραπέζιον καὶ τυχὸν τετράπλευρον τελευταῖον.

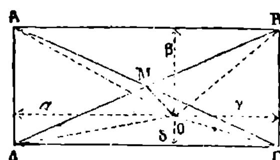
Θεώρημα 347

1187. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἀπὸ δύο ἀπέναντι

---

66. Σημ. μετ. Ἀντιστροφεὺς τοῦ Paucellier, Παντογράφος κλπ.

κορυφῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν.



Σχ. 718.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου. Ἔστωσαν α, β, γ, δ τὰ τέσσαρα τμήματα, ὡς εἰς τὸ σχῆμα, τῶν εὐθειῶν αὐτῶν· θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΟ^2 = α^2 + β^2,$$

$$ΓΟ^2 = γ^2 + δ^2,$$

Ἄρα:

$$ΑΟ^2 + ΓΟ^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + δ^2 = ΒΟ^2 + ΔΟ^2.$$

Θεώρημα 347—I

1188. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν διαγωνίων, πλέον τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων.

Ἐπειδὴ $ΑΟ^2 + ΓΟ^2 = 2\,ΑΜ^2 + 2\,ΜΟ^2$

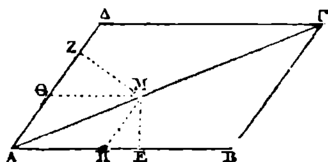
$ΒΟ^2 + ΔΟ^2 = 2\,ΒΜ^2 + 2\,ΜΟ^2\cdot$

ἀλλὰ $ΑΜ = ΒΜ, \quad 4\,ΑΜ^2 = 4\,ΒΜ^2 = ΑΓ^2.$

Ἄρα $ΑΟ^2 + ΒΟ^2 + ΓΟ^2 + ΔΟ^2 = ΑΓ^2 + 4\,ΜΟ^2.$

Θεώρημα 348

1189. Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, αἱ ἀποστάσεις ΜΕ, ΜΖ ἑνὸς τυχόντος σημείου μιᾶς τῶν διαγωνίων ἀπὸ δύο ἐφεξῆς πλευρῶν ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν αὐτῶν.



Σχ. 719.

Διὰ τοῦ Μ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΘ, ΜΗ πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, ὡς καὶ τὰς καθέτους ἐπ' αὐτὰς ΜΕ, ΜΖ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΕΗ, ΜΘΖ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς ὀξείας γωνίας εἰς τὰ Θ καὶ Η ἴσας· ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι παράλληλοι. Ἑπομένως,

$$\frac{ΜΕ}{ΜΖ} = \frac{ΜΗ}{ΜΘ} = \frac{ΜΗ}{ΑΗ}.$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΗΜ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια:

$$\frac{ΜΗ}{ΑΗ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}.$$

Ἄρα:

$$\frac{ΜΕ}{ΜΖ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}.$$

1189 α. Παρατηρήσεις. 1) Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, γραφομένης καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν ΜΕ . ΑΒ = ΜΖ . ΑΔ, ἕπεται ὅτι τὰ γινόμενα τῶν ἀποστάσεων ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσα.

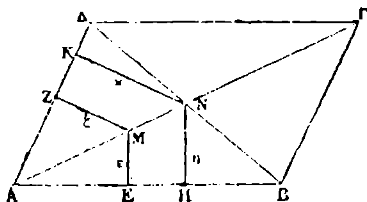
2) Ἡ ἀπόδειξις εἶναι πολὺ ἁπλῆ διὰ τοῦ IV Βιβλίου (Σχ. 720). Ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\eta}{\kappa}, \quad AB.\eta = A\Delta.\kappa \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta}{\kappa} = \frac{A\Delta}{AB}\,;$$

Ἄρα

$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{A\Delta}{AB}.$$

3) Ἡ εὐθεῖα ΑΝ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΒΑΔ. Ὥστε: *ἡ διάμεσος τριγώνου εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν αὐτῶν.*



Σχ. 720

4) Ἡ συμμετροδιάμεσος (§ 899 α) εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου πρὸς τὴν διχοτόμον εὐθεῖα ἢ ἡ ἰσογώνιος αὐτῆς πρὸς τὴν διχοτόμον (§ 1118). Ἄρα: *ἡ συμμετροδιάμεσος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν εἶναι εὐθέως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν αὐτῶν.*

Τὴν ἐνδιαφέρουσαν αὐτὴν πρότασιν θὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ εὐθείας (§ 2333).

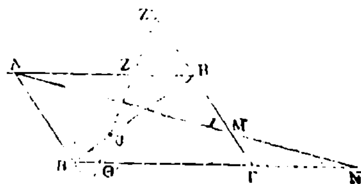
Θεώρημα 348—I

1190. Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler (ἐπμ. § 1205) ἀλλ' ἀποδεικνύεται καὶ ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου.

Θεώρημα 348—II

1191. Διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν ΑΜΝ τυχοῦσαν, τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς Μ καὶ τὴν ΔΓ εἰς Ν. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον ΒΜ . ΔΝ εἶναι σταθερόν. (Compagnon, nº 222).



Σχ. 721.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΔΝ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια. Ἄρα

$$\frac{BM}{AB} = \frac{A\Delta}{\Delta N},$$

καὶ $\qquad BM.\Delta N = AB.A\Delta =$ σταθερὰ ποσότης.

Θεώρημα 348—III

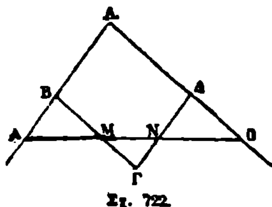
1192. Διὰ σημείου Ο ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ ἑνὸς παραλληλογράμμου φέρομεν τέμνουσαν, συναντῶσαν τὰς ἐφεξῆς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ εἰς Ζ καὶ Θ καὶ τὰς δύο ἄλλας εἰς Ζ' καὶ Θ'. Δείξατε ὅτι ΟΖ.ΟΘ = ΟΖ'.ΟΘ'.

Τὰ τρίγωνα ΟΖΒ, ΟΘ'Δ (Σχ. 721) εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ ΟΖ'Β καὶ ΟΘΔ· ἐπομένως

$$\frac{ΟΖ}{ΟΘ'} = \frac{ΟΒ}{ΟΔ} = \frac{ΟΖ'}{ΟΘ} \quad \text{καὶ} \quad ΟΖ.ΟΘ = ΟΖ'.ΟΘ'.$$

Θεώρημα 349

1193. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν παραλληλογράμμου ἀρθρωτοῦ ΑΒΓΔ, ἢ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν, λαμβάνομεν τέσσαρα σημεῖα Λ, Μ, Ν, Ο κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ὑποθέτοντες τὰ σημεῖα ταῦτα σταθερὰ κατὰ τὰς παραμορφώσεις τοῦ παραλληλογράμμου, δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τούτων ἀπὸ δύο ἄλλων παραμένει σταθερός.



Σχ. 722

Θεωρήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΒΛ, ΜΓΝ εὑρίσκομεν

$$\frac{ΜΛ}{ΜΝ} = \frac{ΜΒ}{ΜΓ}, \text{ λόγος σταθερός.}$$

Ἀναλόγως, $$\frac{ΛΜ}{ΛΟ} = \frac{ΒΜ}{ΑΟ}, \text{ σταθερὸς λόγος ἐπίσης.}$$

1194. Παντογράφος. Ὁ *παντογράφος* εἶναι μηχάνημα διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνομεν τὴν ταχεῖαν ἀναπαραγωγὴν ἑνὸς σχεδίου καὶ τὴν μεγέθυνσιν ἢ σμίκρυνσιν τῶν διαστάσεων αὐτοῦ κατὰ δοθέντα λόγον. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ὀργάνου αὐτοῦ βασίζεται ἐπὶ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἐὰν σταθεροποιήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχεδίου τὸ σημεῖον Μ λ. χ. καὶ μετακινήσωμεν τὸ σημεῖον Λ κατὰ μῆκος τῶν γραμμῶν τοῦ σχεδίου (Α), τὸ σημεῖον Ν θὰ γράψῃ σχῆμα (Β) ὁμοιόθετον τοῦ (Α) πρὸς κέντρον ἐσωτερικῆς ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Μ. Ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν θέσιν τῶν Λ καὶ Ν θὰ εἶναι

$$\frac{ΜΛ}{ΜΝ} = \text{σταθ.}$$

Ἂν σταθεροποιήσωμεν τὸ σημεῖον Λ, τὰ σημεῖα Μ καὶ Ο θὰ γράφουν ὁμοιόθετα σχήματα μὲ κέντρον ἐξωτερικῆς ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Λ.

Ὁμοίως, διὰ Ν σταθερόν, τὰ ὑπὸ τῶν Μ καὶ Ν γραφόμενα σχήματα εἶναι ὁμοιόθετα. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\frac{ΛΜ}{ΜΝ} = \frac{ΜΒ}{ΜΓ},$$

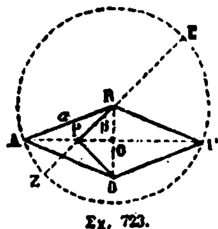
Έπεται καὶ ἡ

$$\frac{ΛΜ}{ΛΜ+ΜΝ}=\frac{ΜΒ}{ΜΒ+ΜΓ} \text{ ἢ } \frac{ΛΜ}{ΛΝ}=\frac{ΜΒ}{ΒΓ}=\text{σταθ. λόγος.}$$

Παρατήρησις. Εἰς τὰς μηχανικὰς ἐφαρμογάς, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι συνήθως ρόμβος.

Θεώρημα τοῦ Peaucellier 350

1195. Ἓν τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ ρόμβου ΑΒΓΔ διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν $ΑΒ^2 - ΡΒ^2$, τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Ρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β. (N. A. 1864, σ. 414).



Σχ. 723.

Ἂς προεκτείνωμεν τὴν ΡΒ μέχρι τῆς συναντήσεώς της Ζ μετὰ τῆς περιφερείας (Β, ΒΑ = α). Ἔχομεν

$$ΡΑ.ΡΓ = ΡΕ.ΡΖ = (α+β)(α-β) = α^2-β^2.$$

Ἄλλη ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου Β ἀπὸ δύο ἄλλων Α καὶ Ρ, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς προβολῆς Ο τοῦ Β ἐπὶ τῆς ΑΡ ἀπὸ τῶν ἰδίων σημείων (§ 71).

Ἄρα

$$ΑΒ^2 - ΒΡ^2 = α^2 - β^2 = ΑΟ^2 - ΟΡ^2 = (ΑΟ+ΟΡ)(ΑΟ-ΟΡ) = ΑΡ.ΡΓ.$$

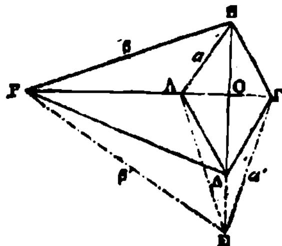
Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ὀφείλεται εἰς τὸν Mannheim. (N. A. 1873, σ. 73).

Θεώρημα 350—I

1196. Τὸ γινόμενον ΑΡ . ΓΡ εἶναι σταθερόν:

1) *Ἐὰν τὸ σημεῖον* Ρ *εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαγωνίου* ΑΓ *τοῦ ρόμβου* ΑΒΓΔ.

2) *Ἐπίσης, ἐὰν ὁ ρόμβος ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τετραπλεύρου* ΒΑΕΓ, *τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος* ΒΕ *εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς* ΑΓ.



Σχ. 724.

1) $β^2 - α^2 = ΟΡ^2 - ΟΑ^2 = (ΟΡ - ΟΑ)(ΟΡ + ΟΑ) = ΑΡ . ΓΡ$

2) $β'^2 - α'^2 = β^2 - α^2 = ΑΡ . ΓΡ.$

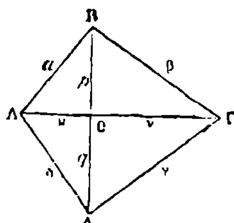
Θεώρημα 350—II

1197. Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἐφεξῆς πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ αἱ μεγαλύτεραι πλευραὶ τῶν δύο ζευγῶν πλευρῶν ἔχουν κοινὴν κορυφήν, αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως.

Ὑποθέσωμεν πληρουμένην τὴν σχέσιν

$$\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \delta^2,$$

καὶ ὅτι αἱ μεγαλύτεραι πλευραί, β καὶ γ, ἔχουν κοινὴν κορυφὴν Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ΒΔ καὶ ΑΓ εἶναι κάθετοι εὐθεῖαι.



Σχ. 725.

Ἔστωσαν Ο καὶ Ο' οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν Β καὶ Δ ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα συμπίπτουν. Ἀλλ' εἶναι

$$\beta^2 - \alpha^2 = \Gamma O^2 - AO^2 \quad (\S\ 71)$$

$$\gamma^2 - \delta^2 = \Gamma O'^2 - AO'^2 \cdot$$

ἄρα:

$$\Gamma O^2 - AO^2 = \Gamma O'^2 - AO'^2,$$

καὶ ἡ σχέσις αὕτη δὲν δύναται νὰ ἀληθεύῃ παρὰ μόνον ἐὰν τὰ Ο καὶ Ο' συμπίπτουν.

Θεώρημα 350—III

1197 α. **Εἰς τετράπλευρον μὲ διαγωνίους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, τὰ ἀθροίσματα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσα.** ***Καὶ ἀντιστρόφως.***

Πράγματι: $\alpha^2 + \gamma^2 = \mu^2 + \nu^2 + p^2 + q^2$

$$\beta^2 + \delta^2 = \nu^2 + p^2 + \mu^2 + q^2.$$

ἄρα: $$\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2. \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔπεται

$$\gamma^2 - \delta^2 = \beta^2 - \alpha^2.$$

Δηλ. ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ (§ 1197).

Θεώρημα 351

1198. **Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ, αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐὰν παραμορφώσωμεν τὸ τετράπλευρον, πλησιάζοντες δύο ἀπέναντι κορυφὰς αὐτοῦ Α καὶ Γ, δείξατε ὅτι τοῦ νέου τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πάλιν καθέτως.**

Ἀφοῦ αἱ διαγώνιοι τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι, θὰ ἔχωμεν

$$\beta^2 - \alpha^2 = \nu^2 - \mu^2 = \gamma^2 - \delta^2 \quad (\Sigma\chi.\ 725).$$

καὶ ἐπειδή, κατὰ τὴν ἀνωτέρω παραμόρφωσιν, τὰ μήκη τῶν πλευρῶν μένουν ἀμετάβλητα, ἡ σχέσις καθετότητος τῶν διαγωνίων $\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \delta^2$ ἐξακολουθεῖ νὰ ὑφίσταται. Εἶναι, ἑπομένως, αἱ διαγώνιοι τοῦ νέου τετραπλεύρου κάθετοι πάλιν ἐπ' ἀλλήλας (§ 1197).

1198. α. Παρατηρήσεις. 1) *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων τῶν διαγωνίων (τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν τετραπλεύρων) εἶναι σταθερὰ ποσότης:*

$$\mu^2 + \nu^2 + p^2 + q^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).$$

2) Τὰ τετράπλευρα τῶν ὁποίων αἱ διαγώνιοι τέμνονται ὀρθογωνίως ὀνομάζονται καὶ *ὀρθοδιαγώνια (orthodiagonaux) τετράπλευρα*.

3) *Ψευδοτετράγωνον (pseudo-carré)* καλεῖται τὸ ὀρθοδιαγώνιον τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιαι εἶναι ἴσαι. (*Mathesis*, 1894, σ. 268).

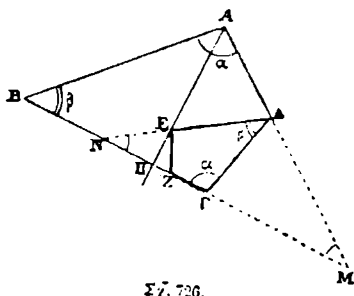
4) *Ῥομβοειδές*, τέλος καλεῖται ἓν ὀρθοδιαγώνιον τετράπλευρον, συμμετρικὸν πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων του.

Θεώρημα 351—I

1198β. Ἐὰν δύο ὅμοια ῥομβοειδῆ ΑΒΓΔ, ΓΔΕΖ ἔχουν μίαν πλευρὰν ΓΔ κοινὴν καὶ μίαν γωνίαν Γ κοινήν, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

1) Ἂς προεκτείνωμεν τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΔ καὶ ΔΕ μέχρι τῶν σημείων Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΜ, ΓΔΝ ἔχουν δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, γωνία Μ = Ν καί, ἑπομένως, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ. Εἶναι, ἄρα, ἡ βάσις ΑΕ τοῦ τριγώνου τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἢ ΒΓ.



Σχ. 726.

2) Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ γων. ΑΔΕ = 360° − 2 (α + β) καὶ ὅτι

$$\text{γων. } ΑΕΔ + ΔΑΕ = 2\,ΔΑΕ = 180° - ΑΔΕ = 2(α + β) - 180°$$

$$ΔΑΕ = α + β - 90°.$$

Ἄρα
$$ΒΑΕ = α + 90° - (α + β) = 90° - β$$

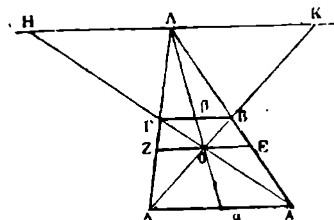
καὶ
$$ΒΑΗ + Β = 90°.$$

Δηλ. ἡ εὐθεῖα ΑΕΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Θεώρημα 352

1199. Παριστῶντες διὰ α καὶ β τὰς βάσεις τραπεζίου καὶ διὰ δ τὸ μῆκος τοῦ, διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων, παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τμήματος ΕΖ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$δ = \frac{2αβ}{α + β} \quad (\S\ 1109)$$



Σχ. 727.

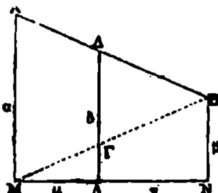
2) Ἐπίσης, ἂν δ′ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΗΛΚ,

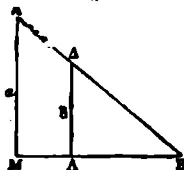
$$δ' = \frac{2αβ}{α - β}.$$

Θεώρημα 352—I

1200. Ἔστω δ τὸ μῆκος τοῦ παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τραπεζίου τμήματος ΔΛ καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ὁ λόγος καθ' ὃν διαιρεῖ τοῦτο τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς. Δείξατε τὴν σχέσιν

$$\delta = \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\nu + \mu}. \qquad (1)$$


Σχ. 728.


Σχ. 729.

Τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν.

1) *Αἱ βάσεις* ΑΜ, ΒΝ *εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς* ΜΝ (Σχ. 728)

Φέρομεν τὴν ΒΝ. Ἔχομεν

$$\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{AM}} = \frac{\Lambda\mathrm{N}}{\mathrm{MN}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta\Gamma}{\alpha} = \frac{\nu}{\mu + \nu}.$$

Ὅθεν $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\nu}{\mu + \nu}$.

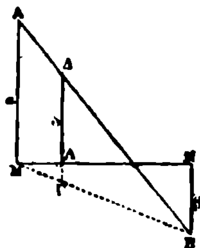
Ἐπίσης $\Gamma\Lambda = \frac{\beta\mu}{\mu + \nu}$.

Ἄρα $\delta = \frac{\alpha\nu + \beta\mu}{\mu + \nu}$.

2) *Μία τῶν βάσεων εἶναι μηδὲν* (Σχ. 729).

Ὁ τύπος (1) ἀνάγεται εἰς

$$\delta = \frac{\alpha\nu}{\mu + \nu}, \qquad (2)$$


Σχ. 730.

3) *Αἱ βάσεις* ΑΜ, ΒΝ *εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς* ΜΝ (Σχ. 730).

Τότε

$$\delta = \Delta\Gamma - \Gamma\Lambda = \frac{\alpha\nu - \beta\mu}{\mu + \nu}. \qquad (3)$$

Παρατηρήσεις. 1) *Διὰ νὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος* (1) *εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, ἀρκεῖ νὰ θεωρῶνται αἱ βάσεις ὁμόσημοι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ ἑτερόσημοι εἰς τὴν τρίτην* (§§ 412 καὶ 436).

2) Ἕνεκα τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὁποῖον παρουσιάζει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, θὰ προταθῇ ἐπίσης καὶ ὡς πρόβλημα (ἐπμ. § 1436).

Θεώρημα 352—II

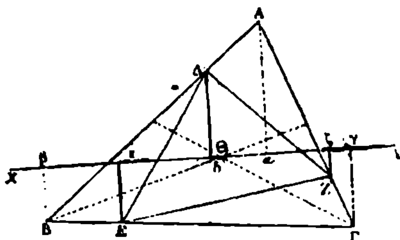
1201. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Δ, Ε, Ζ, διαιροῦντα τὰς πλευρὰς κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου. Δείξατε, ὅτι τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ ἀρχικὸν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων αὐτῶν. (Πάππος).

Ἔστω $\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\mathrm{BE}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mu}{\nu}$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν τὸ αὐτὸ κοινὸν σημεῖον διαμέσων.

Διὰ τοῦ σημείου G, κοινοῦ τῶν διαμέσων τοῦ ΑΒΓ, φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΧΥ καὶ τὰς καθέτους ἐπ' αὐτὴν Αα, Ββ, Γγ καὶ Δδ, Εε, Ζζ, τῶν ὁποίων τὰ μήκη παριστῶμεν διὰ α, β, γ ... ζ. Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ πᾶσαν διὰ τοῦ G εὐθεῖαν ΧΥ ἔχομεν

$\alpha = \beta + \gamma$. (§ 462)



Σχ. 731.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ εἶναι μηδέν, ἐὰν θεωροῦμεν ὡς ἀρνητικὰ τὰ μήκη β καὶ γ (ὡς εἰς τὸ σχῆμα).

1201 α. *Ἀντιστρόφως,* ἐὰν κατ' ἀπόλυτον τιμήν, εἶναι

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

ἡ εὐθεῖα ΧΥ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τοῦ ΑΒΓ [67]. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, κατὰ συνέπειαν, τοῦ θεωρήματος, θὰ πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι $\delta = \varepsilon + \zeta$.

Ἀλλ' εἶναι (§ 1200):

$$\delta = \frac{\alpha\nu - \beta\mu}{\mu + \nu}, \quad \varepsilon = \frac{\beta\nu + \gamma\mu}{\mu + \nu}, \quad \zeta = \frac{\gamma\nu - \alpha\mu}{\mu + \nu},$$

καὶ ἡ δεικτέα σχέσις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\frac{\alpha\nu - \beta\mu}{\mu + \nu} = \frac{\beta\nu + \gamma\mu}{\mu + \nu} + \frac{\gamma\nu - \alpha\mu}{\mu + \nu}$$

ἢ τὴν

$$\alpha(\mu + \nu) = \beta(\mu + \nu) + \gamma(\mu + \nu),$$

καὶ ἥτις ἀληθεύει, ἀφοῦ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

1201 β. ***Σημείωσις.*** Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα παρέχει ἀφορμὴν διὰ διαφόρους παρατηρήσεις. Οὕτω:

1) *Ὁ τόπος τοῦ μέσου* Λ *τῆς* ΕΖ *εἶναι ἡ εὐθεῖα* ΜΝ, *ἡ συνδέουσα τὰ μέσα* Μ, Ν *τῶν* ΓΑ *καὶ* ΓΒ.

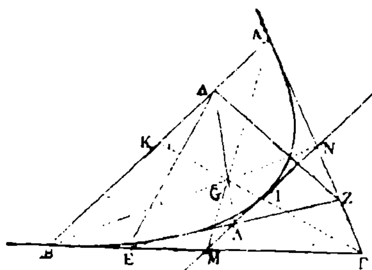
Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔGΛ εἶναι διάμεσος τοῦ ΔΕΖ αἱ δὲ διάμεσοι τῶν δύο τριγώνων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου G, διαιροῦντος ἑκάστην αὐτῶν εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους της ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Ἄρα

$$\frac{AG}{GM} = \frac{\Delta G}{G\Lambda} = \frac{2}{1}.$$

---

67. Σημ. μετ. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου τούτου δὲν ἀναφέρεται. Εἶναι ἄλλωστε πολὺ ἁπλῆ.

καὶ τὰ τρίγωνα ΑGΔ, MGΛ εἶναι ὅμοια. Εἶναι, ἑπομένως, ἡ ΜΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ΜΛΝ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ εὐθεῖα.



Σχ 732.

2) Πᾶσα εὐθεῖα ΕΖ, διαιροῦσα τὰς πλευρὰς ΓΑ, ΓΒ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ, εἶναι ἐφαπτομένη εἰς παραβολήν, ἐφαπτομένην ἐπίσης τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ εἰς τὰ Α καὶ Β (G. nº 712). Ἡ δὲ εὐθεῖα ΜΝ ἐφάπτεται ἐπίσης τῆς καμπύλης αὐτῆς εἰς Ι καὶ ἀποβαίνει ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν ὅταν ΓΑ = ΓΒ.

Δηλ. *ἡ περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς* ΕΖ *εἶναι ἡ παραβολὴ* ΑΙΒ.

Ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν ΔΕ, ΔΖ περιβάλλει ἐπίσης μίαν παραβολήν. Αἱ τρεῖς αὗται παραβολαὶ ὀνομάζονται *παραβολαὶ τοῦ Artzt*, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ καθηγητοῦ ὅστις ἐπέσυρεν τὴν προσοχὴν ἐπ' αὐτῶν, τὸ 1884. Σχετικῶς, πολὺ ἐνδιαφέροντα ἄρθρα ἐδημοσίευσαν οἱ Brocard καὶ G. De Longchamps εἰς τὸ *Journal des maht. élém. et spéciales*, (1885, σ. 76 καὶ 1890, σ. 149)

3) Εἰς τὸ IV Βιβλίον θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι, ἐκ τῶν τριγώνων ΔΕΖ, τὸ ἐλαχίστης ἐπιφανείας εἶναι τὸ τρίγωνον ΚΜΝ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

4) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα (1201) εἶναι ἡ γεωμετρικὴ διατύπωσις τοῦ ἑπομένου θεωρήματος τοῦ *Πάππου*

Ἐὰν τρία ὑλικὰ σημεῖα μὲ ἴσας μάζας, τοποθετημένα ἀρχικῶς εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου, ἐκκινήσουν ταυτοχρόνως, κινούμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου καὶ μὲ ταχύτητας ἀναλόγους τῶν πλευρῶν ἐφ' ὧν κινοῦνται, τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος αὐτῶν θὰ μένῃ ἀμετάβλητον. (N. A., 1881, σ. 337).

Ἐκ τοῦ *θεωρήματος* τῆς συνθέσεως παραλλήλων δυνάμεων καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς τριγώνου ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως τοῦ Πάππου καθίσταται πολὺ εὔκολος.

Ὑποθέσωμεν τρία ἴσα βάρη, p, τοποθετημένα ταυτοχρόνως εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, τὰ διαιροῦντα τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ εἰς Δ τοποθετημένον βάρος p διὰ δύο βαρῶν $\frac{\nu p}{\mu+\nu}$, $\frac{\mu p}{\mu+\nu}$, τοποθετημένων εἰς τας κορυφὰς Α καὶ Β καὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγων τῶν ἀποστάσεων ΔΑ καὶ ΔΒ. Ἐπίσης, τὸ εἰς Ε βάρος δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τῶν βαρῶν $\frac{\nu p}{\mu+\nu}$ εἰς τὸ Β καὶ $\frac{\mu p}{\mu+\nu}$ εἰς τὸ Γ. Ἀναλόγως διὰ τὸ βάρος εἰς τὸ Ζ.

Ἑκάστη, οὕτω, κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται φορτισμένη διὰ τῶν βαρῶν $\frac{\mu p}{\mu+\nu}+\frac{\nu p}{\mu+\nu}$ ἢ p καί, κατ' ἀκολουθίαν, τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος (Δ (p), Ε (p), Ζ (p)) συμπίπτει πρὸς τὸ τοῦ (Α (p), Β (p), Γ (p)), δηλ. πρὸς τὸ κέντρον βάρους G τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

1201 γ. *Ἄλλη ἀπόδειξις.* Ἡ θεώρησις βοηθητικῶν στερεῶν ἢ τῶν προβολῶν ὁδηγεῖ εἰς πολὺ χρησίμους μεθόδους πρὸς ἀπόδειξιν ὡρισμένων θεωρημάτων. Εἰς τὰ παραδείγματα ἅτινα ἐδώσαμεν ἤδη (§§ 174, 176, 177), δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἀκόλουθον:

Γνωρίζομεν, ὅτι ἓν τυχὸν τρίγωνον δύναται νὰ προβληθῇ ἐπὶ ἐπίπεδον κατὰ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα, ἔχον ὡς τομὴν δοθὲν τρίγωνον, δύναται νὰ τμηθῇ κατὰ ἰσόπλευρον τρίγωνον (§ 1844 α, *Σημ.*).

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ αβγ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ τὸ ἐκ προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ κατάλληλον ἐπίπεδον ἰσόπλευρον, δ, ε, ζ αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ. Ἐπειδὴ οἱ λόγοι διατηροῦνται κατὰ τὰς προβολάς, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}, \quad \frac{\beta\varepsilon}{\beta\gamma} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}, \quad \frac{\gamma\zeta}{\gamma\alpha} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{\Gamma A}}.$$

Ἀλλ' εἶναι καθ' ὑπόθεσιν:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{\Gamma A}},$$

ἄρα καὶ

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta} = \frac{\beta\varepsilon}{\beta\gamma} = \frac{\gamma\zeta}{\gamma\alpha}.$$

Ἐπειδὴ $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\delta = \beta\varepsilon = \gamma\zeta$, ἢ τὰ τρίγωνα αδζ, βδε, γεζ ἴσα καὶ τὸ δεζ τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων αβγ καὶ δεζ αἱ διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἄρα καὶ αἱ διάμεσοι τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ὧν τὰ πρῶτα εἶναι προβολαί, θὰ διέρχωνται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐνδιαφέρον συμπλήρωμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εὑρίσκεται εἰς τὴν *Mathesis* (1907 σ. 98, nº 9· Agromonof).

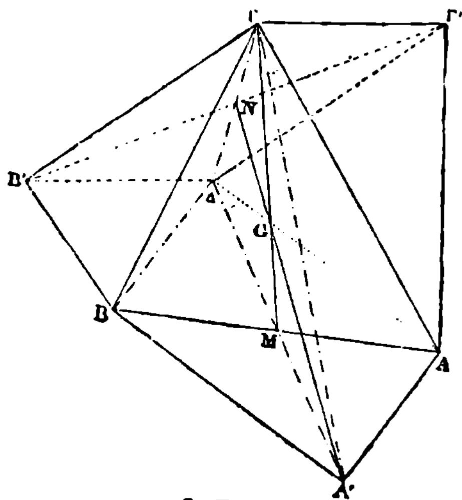
Θεώρημα 352—III

1201 δ. *Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρίγωνα ὅμοια πρὸς ἄλληλα ΑΑ'Β, ΒΒ'Γ, ΓΓ'Α καὶ κείμενα πάντα ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἢ πάντα πρὸς ἐκεῖνο τὸ μέρος τῆς κοινῆς αὐτῶν πλευρᾶς μετὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς ὃ κεῖται καὶ τὸ τρίγωνον. Δείξατε ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

Ἂς φέρωμεν τὴν συνδέουσαν τὸ Α' μὲ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ εὐθεῖαν καὶ ἂς λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΜΔ = ΜΑ'. Τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ'Α. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΒ'ΓΓ' εἶναι παραλληλόγραμμον.

1) Τὰ τρίγωνα ΔΒΒ' καὶ ΓΑΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· ἐπειδὴ γων. ΑΒΓ = ΔΒΒ' καὶ $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{BB'}}$, ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΒ'. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΔΒ' καὶ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΑ, ἴσην πάλιν πρὸς τὴν Γ'ΓΑ. Εἶναι λοιπὸν αἱ ΓΓ' καὶ ΔΒ' εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΔΓ' καὶ ΓΒ'· εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα ΔΒ'ΓΓ' παραλληλόγραμμον.

2) Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΓΑ', αἱ διάμεσοι ΓΜ καὶ Α'Ν τέμνονται εἰς τὰ δύο τρίτα τῶν μηκῶν των· ἀλλ' ἡ ΓΜ εἶναι μία τῶν διαμέσων τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ἡ δὲ Α'Ν μία τῶν διαμέσων



Σχ. 733.

τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'. Ἔχουν, κατὰ συνέπειαν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους G.

1201 ε. Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν βλέπε ἐπίσης τὴν *Γεωμετρίαν* τῶν Rouché καὶ Comberousse. (1891. *Σημ.* ὑπὸ Neuberg, σ. 462, n° 38).

Τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι γενίκευσις τοῦ Θεωρ. (§ 1201) τοῦ Πάππου· προσφέρεται δὲ καὶ τὸ ἴδιον εἰς γενικεύσεις, ὡς ἔδειξαν οἱ Neuberg, Resal, Laisant. (*Mathesis*, 1881, σ. σ. 166, 167· Ν. Α. 1881, σ. 337· *Projections et contre—projections*, ὑπὸ Neuberg, σ. 52).

Θεώρημα 352—IV

1201 ζ. Ἐὰν ἓν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἄλλο, ὅμοιον πρὸς αὐτό, αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν του ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου εἶναι τὰ ἡμίση τῶν τελευταίων τούτων πλευρῶν. (E. Cesaro).

(Βλ. *Mathesis*, 1885, σ. 134, ζήτ. 274).

Θεώρημα τοῦ S. Roberts 353

1202. Εἰς ἰσοσκελὲς ἀρθρωτὸν τραπέζιον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι ἔχουν ἀμετάβλητα μήκη, εὐθεῖα ΡΜΝΛ, ἀγομένη διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις, ὁρίζει τμήματα ΡΜ, ΡΝ, τῶν ὁποίων ὁ γινόμενον εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν παραμόρφωσιν τοῦ σχήματος. (*Nouvelle Correspondance* τοῦ Catalan, 1877, σ. 132).

Ἂς εἶναι

$$ΑΡ = μ,\quad ΒΡ = ν,\quad ΑΒ = ΓΔ = β,\quad ΑΓ = ΒΔ = α.$$

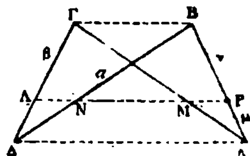
Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΡΜ}{ΒΓ} = \frac{μ}{μ+ν},\quad ΡΜ = ΒΓ.\frac{μ}{μ+ν},$$

$$\frac{ΡΝ}{ΑΔ} = \frac{ν}{μ+ν},\quad ΡΝ = ΑΔ.\frac{ν}{μ+ν},$$

καὶ

$$ΡΜ.ΡΝ = ΑΔ.ΒΓ.\frac{μν}{(μ+ν)^2},$$



Σχ. 734.

Ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον, ὡς ἰσοσκελές, εἶναι ἐγγράψιμον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἢ

$$ΑΔ.ΒΓ = α^2 - β^2.$$

Ἑπομένως:

$$ΡΜ.ΡΝ = \frac{(α^2-β^2).μν}{(μ+ν)^2},\quad \text{ποσότης σταθερά.}$$

Παρατηρήσεις. 1) $ΜΡ.ΜΛ = ΡΜ.ΡΝ,$

καί, ἑπομένως, τὸ σημεῖον Ρ, ἢ Μ, δύναται νὰ ληφθῇ ὡς πόλος ἀντιστροφῆς (§ 1203 α).

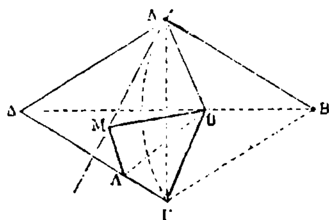
2) Τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΔΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ΑΓ = ΒΔ καὶ ΑΒ = ΓΔ ὀνομάζεται καὶ *ἀντιπαραλληλόγραμμον*. (Βλ. Dostor, Ν. Α., 1867, (2) VI, σ. 57 καὶ Neuberg, *Mathesis*, 1887, σ. 227).

3) Ἂν Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἴσων διαγωνίων, θὰ εἶναι προφανῶς ΑΕ + ΕΒ = ΑΓ = σταθ.· κατὰ τὰς παραμορφώσεις ἑπομένως τοῦ ἀρθρωτοῦ τετραπλεύρου, καθ' ἃς ἡ πλευρὰ ΑΒ διατηρεῖται ἀκίνητος, τὸ σημεῖον τομῆς Ε τῶν διαγωνίων αὐτοῦ γράφει ἔλλειψιν μὲ ἑστίας τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

1203. ***Σημείωσις ἐπὶ τῶν ἀντιστροφέων.*** Ὁ ἀντιστροφεὺς τοῦ *Paucellier* ἐπέλυσε διὰ πρώτην φορὰν τὸ πρόβλημα τοῦ αὐστηροῦ μετασχηματισμοῦ (διὰ μηχανικῶν μέσων) μιᾶς κυκλικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον (καὶ τἀνάπαλιν). Ἡ ἀνακάλυψις αὕτη ἐδημοσιεύθη εἰς γενικὰς γραμμὰς καὶ ὑπὸ μορφὴν προτάσεως τὸ 1864, εἰς τὰ *Nouvelles Annales de mathématiques* σ. 414. Εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν (1873, σ. 71), ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει λεπτομερῶς τὰ κατ' αὐτὴν ἐνωρίτερον, ἐν τούτοις, ὁ Lipkine (Πετρούπολις), εὑρὼν καὶ αὐτὸς τὴν ἰδίαν λύσιν τοῦ προβλήματος τὸ 1870, ἀνέπτυξε τὴν θεωρίαν καὶ περιέγραψε τὴν συσκευὴν ἐνώπιον τῆς Ἀκαδημίας τῆς Πετρουπόλεως τὸ 1871.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς, αἱ μελέται καὶ αἱ ἀνακαλύψεις ἐπὶ τῶν ἀντιστροφέων διεδέχοντο ἀλλήλας ταχέως. Ὁ Sylvester (1814-1897), ἐπιφανὴς ἄγγλος γεωμέτρης, ἔκαμεν τὸ 1874 μίαν ὡραίαν, ὅσον καὶ σοφήν, διάλεξιν ἐπὶ τοῦ *μετασχηματισμοῦ τῆς κυκλικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον*. Δύο ἄλλοι συμπατριῶται αὐτοῦ οἱ Hart καὶ Kempe, ἐπεννόησαν νέα πρότυπα, ἐνῷ ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Peaucellier ἐξηκολούθει νὰ ἀνευρίσκῃ νέα *ἀρθρωτὰ συστήματα*.

Ὁ *ἀντιστροφεὺς τοῦ* Hart ἔχει πέντε στελέχη καὶ βασίζεται ἐπὶ τῆς προτάσεως τοῦ S. Roberts (§ 1202), ἐνῷ ὁ τοῦ Peaucellier ἔχει ἑπτά, ὡς καὶ ὁ τοῦ Kempe (N. A., 1875, σ. 552). Ὁ ἀντιστροφεὺς τοῦ τελευταίου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.



Σχ. 735.

«*Δίδεται ῥόμβος* ΑΒΓΔ *καὶ σημεῖον* Ο *ἐπὶ μιᾶς τῶν διαγωνίων του· σχηματίζεται οὕτω τετράπλευρον* ΑΟΓΔ *ὀρθοδιαγώνιον. Ἐπὶ τῆς* ΟΓ, *ὡς ὁμολόγου τῆς* ΓΔ, *κατασκευάζομεν τετράπλευρον* ΟΓΛΜ *ὅμοιον τοῦ* ΔΑΟΓ. *Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΑΜ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν* ΑΒ».

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν, ἢ καὶ νὰ ἀναζητήσωμεν ἀπόδειξιν διὰ τῶν Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας (§ 1198 β). (Βλέπε σχετικῶς N. A., 1875, σ. 553 καὶ Conférences de M. Neuberg, κατωτέρω ἀναφερομένας).

Ἀπὸ τῆς συντάξεως τῆς σημειώσεως ταύτης (1882), ὁ Hart ἐγνωστοποίησεν ἕνα νέον ἀντιστροφέα μὲ πέντε στελέχη· εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἔφθασε καὶ ὁ Kempe.

1203 α. Πόλος ἀντιστροφῆς. Εἰς τοὺς ἀντιστροφεῖς τῶν Peaucellier, Hart κλπ., ὀνομάζονται *πόλοι ἀντιστροφῆς* αἱ ἀρχαὶ Ρ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων ΡΑ, ΡΓ (Σχ. 723 καὶ 724), ἢ ΡΜ, ΡΝ (Σχ. 734), τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν.

Εἰς τοὺς ἀντιστροφεῖς τούτους, ἐξαιρουμένου ἐκείνου τοῦ Kempe, ὁ πόλος ἀντιστροφῆς καὶ τὰ δύο ἄκρα τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διὰ πᾶν σχετιζόμενον μὲ τοὺς ἀντιστροφεῖς, χρήσιμος ἀποβαίνει ἡ μελέτη τῶν ἑπομένων ἄρθρων:

Εἰς τὰ *Nouvelles Annales de mathématiques; Notes sur une question de géométrie de compas*, ὑπὸ Peaucellier (1873, σ. 71).— *Sur les Systèmes de tiges articulées*, ὑπὸ V. Liguine, *professeur à Odessa* ὑπὸ τοῦ ἰδίου Peaucellier (1881, σ. 153).— *Étude du rapport des vitesses des mouvements à considérer dans l'inverseur Peuacellier*, ὑπὸ M. D'Ocagne, (1881, σ. 456· 1884, σ. 199 καὶ 1882, σ. 153, ἄρθρον ὑπὸ Liguine.

Εἰς τὴν *Nouvelle Correspondance mathématique* εὑρίσκονται δύο πολὺ ἐνδιαφέροντα ἄρθρα. Τὸ πρῶτον (1879, σ. 129); *Les Compas composés* τοῦ Peaucellier, Hartt, Kempe ὑπὸ P. Mansion, καὶ τὸ δεύτερον (1877, σ. 129 καὶ 177): *Sur la production du mouvement rectiligne exact, au moyen des tiges articulées*, ὑπὸ A.-B. Kempe.

Τὸ 1879, εἰς τὸ *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, σ. 109, 144 καὶ 151, ὁ Darboux ἐδημοσίευσεν διάφορα ἄρθρα ἐπὶ τῶν ἀρθρωτῶν συστημάτων.

Τὸ 1886, ὁ Neuberg ἐδημοσίευσεν: *Deux conférences sur quelques systèmes de tiges articulées· tracé mécanique des lignes* (τεῦχος 48 σελίδων). Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος ἐπὶ τοῦ *ἀντιστροφέως* τοῦ Kempe εὑρίσκεται εἰς τὴν σελίδα 18 τοῦ τεύχους αὐτοῦ. Βλ. ἐπίσης καὶ τὴν πολὺ ἁπλῆν ἀπόδειξιν ἣν ἐδώσαμεν (§ 1198 β).

Εἰς τὴν *Mathesis* (1894, σ. 111) ὑπάρχει μία μελέτη: *sur quelques systèmes de tiques articulées*, ὑπὸ R. Bricard.

Εἰς τὰ *Nouvelles Annales de mathématiques* (1902, σ. 127), ὁ J. Revéille ἐδημοσίευσε μίαν πολὺ ἐνδιαφέρουσαν γεωμετρικὴν σπουδὴν ἐπὶ τοῦ *Système articulé de Hart* μὲ πέντε στελέχη, τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει τὴν χάραξιν μιᾶς εὐθείας ἢ περιφερείας. Τὸ σύστημα τοῦτο οἱ Darboux καὶ Königs εἶχον μελετήσει διὰ τῆς Ἀναλύσεως.

Εἰς τὸ τρίτον μέρος τῶν *Récréations mathématiques et Problèmes* τοῦ W. Rouse - Hall, μετάφρασις τοῦ Fitz - Patrick, ὁ σοφὸς καὶ πολυμαθὴς A. Aubry δίδει μίαν πολὺ ὡραίαν μελέτην ἐπὶ τῆς *Géométrie des Systèmes articulés*. Προγενεστέρως, τὸ 1900, ὁ ἴδιος εἶχε δημοσιεύσει μίαν ἀξιοσημείωτον ἐργασίαν: *Estudios sobre los canonicografios* εἰς τὸ *El Progresso matemático* (Σαραγόσα, 1900, σ. 337 - 363).

Θεώρημα 353—I

1203 β. Ἐπὶ δύο ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ ἑνὸς τετραπλεύρου κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, τρίγωνα ΑΑ'Β, ΓΓ'Δ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων, ἐσωτερικῶς τοῦ τετραπλεύρου, ἄλλα δυο ΓΒ'Β, ΑΔ'Δ ὅμοια καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Δείξατε, ὅτι τὸ σχῆμα Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμον. (H. Van Aubel, *Mathesis*, 1881, σ. 167).

Ἀπόδειξις ἀνάλογος τῆς τοῦ πρώτου μέρους τῆς προτάσεως τῆς § 1201 δ.

Θεώρημα 353—II

1203 γ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου τυχόντος ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχοντα τὰς πλευρὰς ταύτας ὡς ὑποτεινούσας. Δείξατε, ὅτι αἱ διαγώνιοι Α'Γ', Β'Δ' τοῦ οὕτω σχηματιζομένου τετραπλεύρου Α'Β'Γ'Δ' τέμνονται καθέτως καὶ εἶναι ἴσαι.

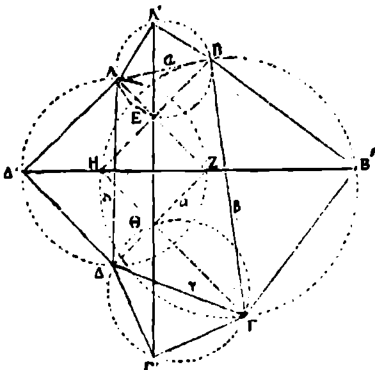
1) Εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν διαγωνίων ΕΘ, ΗΖ τοῦ τετραγώνου ΕΖΘΗ, περιγεγραμμένου (κατὰ τὰ ἐν §§ 1020, 1021) εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

2) Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι. Ἐπειδή, ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ΕΖΘΗ· ἡ διαγώνιος αὐτοῦ Α'Γ' εἶναι ἴση πρὸς

$$Α'Γ' = Α'Ε + ΘΓ' + α\sqrt{2} \quad (1)$$

ἡ δὲ Δ'Β' πρὸς

$$Β'Δ' = Δ'Ζ + ΗΒ' - α\sqrt{2} \quad (2)$$



Σχ. 735. α

Ἀλλ' εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΕΒΑ' ἔχομεν

$$ΑΑ' = Α'Β = \frac{α}{\sqrt{2}},$$

καὶ $$\alpha \times A'E = (AE + EB)\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

ἢ $$A'E = \frac{AE + EB}{\sqrt{2}} \quad (\text{Θεώρ. Πτολεμαίου}).$$

Ἀναλόγως : $$\Theta\Gamma' = \frac{\Delta\Theta + \Theta\Gamma}{\sqrt{2}},$$

καὶ $$\Delta'Z = \frac{AZ + \Delta Z}{\sqrt{2}} = \frac{AE + \Delta\Theta + 2\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

$$B'H = \frac{BH + H\Gamma}{\sqrt{2}} = \frac{EB + \Theta\Gamma + 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

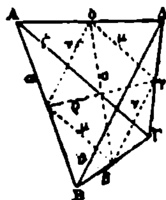
Ἀντικαθιστῶντες τὰ εἰς τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) μήκη διὰ τῶν τιμῶν ἐκ τῶν (3), εὑρίσκομεν

$$A'\Gamma' = \frac{AE + EB + \Delta\Theta + \Theta\Gamma}{\sqrt{2}} + \alpha\sqrt{2} = \Delta'B'.$$

Σημείωσις. Ἡ ἐκφώνησις τῆς προτάσεως αὐτῆς ὀφείλεται εἰς τὸν E. Collignon (A. F., *Marseille*, σ. 53).

Θεώρημα 354

1204. **Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων : ἅτινα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.**



Σχ. 736.

Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων (§ 542). Εἰς πᾶν δὲ παραλληλόγραμμον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων (§ 1190). Ἐπομένως,

$$2\mu^2 + 2\nu^2 = \rho^2 + \sigma^2$$

καὶ $$4\mu^2 + 4\nu^2 = 2(\rho^2 + \sigma^2). \qquad (1)$$

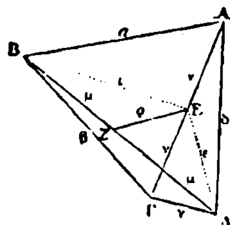
Ἀλλὰ $$4\mu^2 = (2\mu)^2 = \zeta^2, \quad 4\nu^2 = (2\nu)^2 = \theta^2$$

$$\zeta^2 + \theta^2 = 2(\rho^2 + \sigma^2).$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο, προταθὲν εἰς τὰ *Annales de Gergonne* (τόμ. II, 1811 - 1812, σ. 196) ἐλύθη ὑπὸ τῶν *Encontre*, *Rochat* κλπ., τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα ἀπαντῶνται συχνὰ εἰς τὰ *Annales*. Ἡ σπουδὴ τῆς προτάσεως αὐτῆς ἤγαγεν εἰς διάφορα ἄλλα θεωρήματα καί, ἰδιαιτέρως, εἰς τό: Εἰς πᾶν τετράεδρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀντικειμένων ἀκμῶν, πλέον τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἑνοῦντος τὰ μέσα αὐτῶν τμήματος, εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ τρία ζεύγη ἀντικειμένων ἀκμῶν (ὡς ἀνωτέρω, σ. 314), καθὼς καὶ εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα τοῦ Euler :

Θεώρημα τοῦ Euler 355

1205. Εἰς πᾶν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἑνοῦντος τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τμήματος.


Σχ. 737.

Ἄς συνδέσωμεν τὸ μέσον Ε τῆς μιᾶς τῶν διαγωνίων μετὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ. Ἐπειδὴ αἱ ΒΕ, ΔΕ, ΖΕ εἶναι διάμεσοι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΓΔΑ καὶ ΒΕΔ, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$\alpha^2+\beta^2=2\iota^2+2\nu^2,$$

$$\gamma^2+\delta^2=2\varepsilon^2+2\nu^2,$$

καὶ ἐκ προσθέσεως κατὰ μέλη

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=2\iota^2+2\varepsilon^2+4\nu^2.$$

Ἀλλ' εἶναι $\iota^2+\varepsilon^2=2\rho^2+2\mu^2.$

Ἄρα: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(2\mu)^2+(2\nu)^2+4\rho^2$

ἤ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=ΒΔ^2+ΑΓ^2+4\rho^2.$

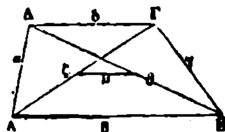
1206. *Παρατηρήσεις.* 1) Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ εἰς τὸ *στρεβλὸν τετράπλευρον*, διὰ τὸ τετράπλευρον δηλ. διὰ τὸ ὁποῖον αἱ τέσσαρες πλευραί του δὲν εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι πανομοιότυπος, μολονότι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου δὲν τέμνονται.

2) Τὸ θεώρημα τῆς § 1190 εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω· ἐπειδή, ἐὰν τὸ τετράπλευρον ἀποβῇ παραλληλόγραμμον, τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τμῆμα ἔχει μῆκος μηδέν.

Θεώρημα 355—I

1207. Εἰς τυχὸν τραπέζιον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, πλέον τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν βάσεων.


Σχ. 738.

Φέρομεν τὸ τμῆμα μ, τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων. Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler (§ 1205), εὑρίσκομεν

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\zeta^2+\theta^2+4\mu^2 \quad (1)$$

Ἀλλὰ $2\mu=\beta-\delta$ (§ 530) καὶ $4\mu^2=\beta^2+\delta^2-2\beta\delta.$ (2)

Ἄρα : $\zeta^2+\theta^2=\alpha^2+\gamma^2+2\beta\delta.$

Θεώρημα 355—II

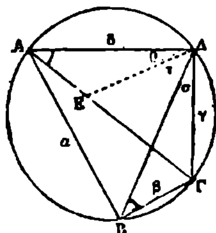
1208. Ἐὰν ἡ μικροτερα βάσις τραπεζίου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς μεγαλυτέρας βάσεως καὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Τὸ τμῆμα μ, ὡς ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μικροτέρας βάσεως· ἄρα $4\mu^2 = \delta^2$ καὶ ὁ τύπος (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου ἀνάγεται εἰς τὸν

$$\zeta^2 + \theta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Α' Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου 356

1209. **Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.**



Σχ. 730.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$\text{ΑΓ}\,.\,\text{ΒΔ} = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Ἂς σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν ρ ἴσην πρὸς τὴν σ. Τὰ τρίγωνα ΔΕΑ καὶ ΔΓΒ εἶναι ἰσογώνια, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι των εἰς τὰ Α καὶ Β βαίνουν ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ. Ἑπομένως,

$$\frac{\delta}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \beta\delta = \text{ΑΕ}\,.\,\text{ΒΔ}.$$

Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΒΔΑ εἶναι ἐπίσης ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι των εἰς τὰ Γ καὶ Β βαίνουν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔ καὶ $\rho + \tau = \tau + \sigma$.

Ἄρα : $$\frac{\gamma}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma = \text{ΓΕ}\,.\,\text{ΒΔ}.$$

Διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν

$$\alpha\gamma + \beta\delta = \text{ΒΔ}\,(\text{ΑΕ} + \text{ΕΓ}) = \text{ΒΔ}\,.\,\text{ΑΓ}.$$

1209. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ὑποδεικνύει ὁ Πτολεμαῖος εἰς τὸ ἔργον του *Μαθηματικὴ Σύνταξις*, διὰ τὴν κατασκευὴν πίνακος παρέχοντος τὰ μήκη χορδῶν ἀντιστοίχων δοθέντων τόξων.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τοὺς κυριωτέρους τύπους τῆς εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας, ὡς ἔδειξεν ὁ Carnot εἰς τὴν *Géométrie de Position* αὐτοῦ.

Σχετικῶς βλέπε τὸ *Aperçu historique* τοῦ Chasles καὶ τὴν *Histoire des mathématiques* τοῦ Ferdinand Hoffer.

Μίαν πολὺ εὐφυᾶ ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου ἔχει δώσει ὁ Mansion εἰς τὴν *Nouv. Correspondance mathématique*, 1876, σ. 181. Ἡ ἀπόδειξις αὐτη, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐδόθη καὶ ὑπὸ τοῦ Brahmagupta, Ἰνδοῦ γεωμέτρου τοῦ VII αἰῶνος.

Εἰς τὸ *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse (ἑβδόμη ἔκδοσις, σ. 158, n° 240), εὑρίσκεται μία πολὺ ὡραία ἀπόδειξις, ἐμπνευσθεῖσα πιθανῶς ὑπὸ τῆς κατασκευῆς τοῦ Sturm ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου (§ 151).

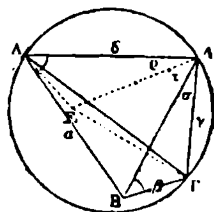
Βλέπε ἐπίσης καὶ *Bulletin de Mathématiques Élémentaires*, 1895-1896, σ. 144.

Β' Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου 357

1210. Εἰς πᾶν μὴ ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ΑΓ . ΒΔ $<$ αγ + βδ.

Διὰ τριῶν κορυφῶν Α, Δ, Γ τοῦ τετραπλεύρου ἂς γράψωμεν περιφέρειαν καὶ ἂς σχηματίσωμεν πάλιν τὴν γωνίαν ρ = σ καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην πρὸς τὴν ΓΒΔ (Σχ. 740).



Σχ. 740

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ γωνία ΓΒΔ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑΓ καί, ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα ΑΕ δὲν συμπίπτει πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΑ καὶ ΔΓΒ λαμβάνομεν:

$$\frac{\delta}{B\Delta} = \frac{AE}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \beta\delta = AE \,.\, B\Delta \qquad (1)$$

καὶ
$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{\Delta \Gamma} \,.$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΒ = τ + ρ εἶναι ἴση πρὸς ΕΔΓ = τ + σ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΒΔΑ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας εἰς τὸ Δ ἴσας καὶ περιεχομένας μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Ἑπομένως,

$$\frac{\gamma}{B\Delta} = \frac{\Gamma E}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \alpha\gamma = B\Delta \,.\, \Gamma E. \qquad (2)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\alpha\gamma + \beta\delta = B\Delta\,(AE + E\Gamma).$$

Ἀλλ' εἶναι ΑΕ + ΕΓ $>$ ΑΓ· κατὰ συνέπειαν

$$\alpha\gamma + \beta\delta > B\Delta + A\Gamma.$$

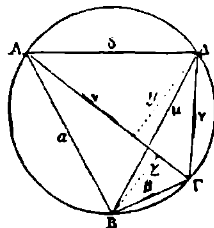
Παρατηρήσεις. 1) Ἡ κορυφὴ Β δύναται, ἀδιαφόρως, νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἢ τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου, χωρὶς μεταβολὴν τῆς ἐκφωνήσεως τῆς προτάσεως.·

2) Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν θεωρημάτων τοῦ Πτολεμαίου ἕπεται, ὅτι *ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.*

Θεώρημα 357—I

1211. Αἱ διαγώνιοι ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσματα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν ἀπολήγουσῶν εἰς τὰ ἄκρα τῶν διαγωνίων:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma} \,.$$



Σχ. 741.

(Ἡ ἑπομένη ἀπόδειξις ὑποθέτει γνωστὸν τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{\nu y}{2}$, τὸ τοῦ ΑΒΓ ἴσον πρὸς $\frac{\nu z}{2}$ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἑπομένως $\frac{\nu y + \nu z}{2}$).

Ἔστω 2R ἡ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς

τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν. Θὰ ἔχωμεν, ἐπομένως, διὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ τὰς ἰσότητας

$$\gamma\delta = 2\text{R}y, \quad \gamma\delta\nu = 2\text{R}y\nu = \frac{4\text{R}y\nu}{2},$$

$$\alpha\beta = 2\text{R}z, \quad \alpha\beta\nu - 2\text{R}z\nu = \frac{4\text{R}z\nu}{2},$$

καὶ διὰ προθέσεως

$$\nu(\alpha\beta + \gamma\delta) = 4\text{R} \times \text{ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ}.$$

Ἀναλόγως, εὑρίσκομεν

$$\mu(\alpha\delta + \beta\gamma) = 4\text{R} \times \text{ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ}.$$

Ἐπομένως,

$$\mu(\alpha\delta + \beta\gamma) = \nu(\alpha\beta + \gamma\delta),$$

$$\frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma} = \frac{\mu}{\nu}.$$

1211. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδίδεται συχνὰ εἰς τὸν Πτολεμαῖον· εἶναι ἐν τούτοις μεταγενέστερον τοῦ Viéte. (*Intermédiaire de Mathématiciens*, 1900, σ. 323, nº 1719. *Σημ.* τοῦ Paul Tannery).

Θεώρημα 358

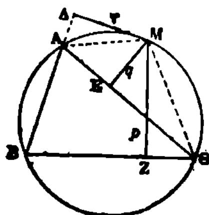
1212. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τριῶν κορυφῶν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῆς τετάρτης κορυφῆς ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν διὰ τὰ δύο τρίγωνα μὲ κοινὴν πλευρὰν τὴν μίαν τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἴδιον ἄθροισμα διὰ τὰ τρίγωνα μὲ κοινὴν πλευρὰν τὴν ἑτέραν διαγώνιον. (*J. M. E.* καὶ *S.*, 1882, σ. 217. Σημ. τοῦ X. Antomari).

Τὰ θεωρήματα τοῦ Πτολεμαίου συνάγονται εὐκόλως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

Θεώρημα 358—I

1212 α. Ἐὰν ἡ ΔΕΖ εἶναι ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ σχετικὴ πρὸς τὸ σημεῖον Μ (Σχ. 741 α), θὰ εἶναι

$$\text{p}\,.\,\text{ΜΑ} = \text{q}\,.\,\text{ΜΒ} = \text{r}\,.\,\text{ΜΓ}.$$



Σχ. 741 α

Πράγματι, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΖΓ, ΜΔΑ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΜΓΖ, ΜΑΔ ἔχουν τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα. Ἄρα

$$\frac{\text{ΜΑ}}{\text{r}} = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{p}}$$

ἢ $\quad \text{p ΜΑ} = \text{r ΜΓ}$ κλπ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις χρησιμεύει διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου καὶ μᾶς ὑπεδείχθη τὸ 1907 ὑπὸ τοῦ E. Lemoine.

Θεώρημα 353—II

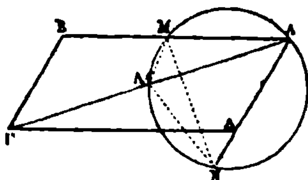
1213. Ἔστω περιφέρεια διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ τέμνουσα τὰς πλευρὰς αὐτοῦ εἰς τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν. Δείξατε τὴν σχέσιν

$$ΑΓ.ΑΛ = ΑΒ.ΑΜ + ΑΔ.ΑΝ.$$

Ἂς φέρωμεν τὰς ΛΜ, ΛΝ, ΜΝ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΜΛΝ εἶναι ἐγγεγραμμένον, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$ΑΛ.ΜΝ = ΑΜ.ΛΝ + ΑΝ.ΛΜ, \quad (1)$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΛΜΝ τὰς ἀναλογίας



Σχ. 742.

$$\frac{ΑΓ}{ΜΝ} = \frac{ΑΒ}{ΛΝ} = \frac{ΑΔ}{ΜΛ}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον ὅρον τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων κλασμάτων, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΑΓ}{ΜΝ}.ΑΛ.ΜΝ = \frac{ΑΒ}{ΛΝ}.ΑΜ.ΛΝ + \frac{ΑΔ}{ΛΜ}.ΑΝ.ΛΜ$$

ἢ

$$ΑΓ.ΑΛ = ΑΒ.ΑΜ + ΑΔ.ΑΝ.$$

Παρατήρησις. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΛΜΝ δίδουν ἐπίσης

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΛΝ}{ΛΜ} \quad ἢ \quad ΑΒ.ΛΜ = ΑΔ.ΛΝ.$$

Τὸ θεώρημα τῆς § 1189 εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω.

Θεώρημα 358—III

1213 α. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α λάβωμεν δύο μήκη ΑΜ καὶ ΑΝ, συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως β.ΑΜ + δ.ΑΝ = 1, ὅπου δ καὶ β σταθεραί, ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (*J. de M.* τοῦ *Vuibert* 1905, σ. 87).

Λαμβάνοντες ΑΒ = β, ΑΔ = δ (Σχ. 742), τὸ προηγούμενον θεώρημα μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΒ.ΑΜ + ΑΔ.ΑΝ}{ΑΓ.ΑΛ} = 1,$$

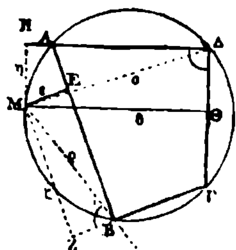
ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Λ εἶναι σταθερὸν ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

Θεώρημα τοῦ Πάππου 359

1214. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἀπὸ δύο ἀντικειμένων πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι: ΜΕ.ΜΘ = ΜΖ.ΜΗ ἢ ε.θ = ζ.η.

1η Ἀπόδειξις. Συνδέομεν τὸ σημεῖον Μ μετὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν, Β καὶ Δ λ. χ., διὰ τῶν εὐθειῶν ΜΒ $= \rho$ καὶ ΜΔ $= \sigma$.



Σχ. 743.

Τὰ τρίγωνα ΜΒΕ καὶ ΜΔΗ εἶναι ὅμοια, ὡς ὀρθογώνια εἰς τὰ Ε καὶ Η καὶ ἔχοντα τὰς ὀξείας γωνίας των εἰς Β καὶ Δ ἴσας, ὡς βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΜ. Ἑπομένως,

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\rho}{\sigma}. \qquad (1)$$

Τὰ τρίγωνα ἐπίσης ΜΔΘ καὶ ΜΒΖ εἶναι ὀρθογώνια καὶ μὲ ἴσας τὰς γωνίας των εἰς Β καὶ Δ, ὡς ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΜΔΓΒ. Εἶναι ἄρα ὅμοια καὶ

$$\frac{\theta}{\zeta} = \frac{\sigma}{\rho}. \qquad (2)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν

$$\frac{\varepsilon\theta}{\zeta\eta} = \frac{\rho\sigma}{\rho\sigma} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\theta = \zeta\eta.$$

2α Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τοῦ ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ὕψους. Ἑπομένως,

$$\alpha\beta = 2R\varepsilon, \quad \beta\gamma = 2R\zeta, \quad \gamma\delta = 2R\theta, \quad \delta\alpha = 2R\eta$$

καὶ $\alpha\beta\gamma\delta = 4R^2\varepsilon\theta, \quad \beta\gamma\delta\alpha = 4R^2\zeta\eta.$

Ἄρα $\varepsilon\theta = \zeta\eta.$

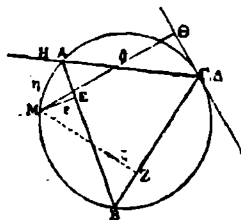
Σχ. 744.

1215. *Εἰδικὴ περίπτωσις*. 1) *Δύο κορυφαὶ Γ καὶ Δ συμπίπτουν.*

Τὸ τετράπλευρον ἀποβαίνει τρίγωνον καὶ ἡ πλευρὰ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας. Θὰ ἔχωμεν πάλιν

$$\varepsilon\theta = \zeta\eta,$$

ἢ τὸ ἑπόμενον θεώρημα:



Σχ. 745.

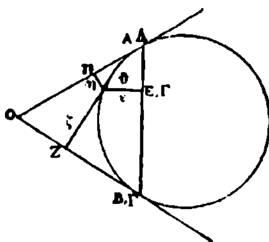
1215 α. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας ἀπὸ δύο πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης.

2) *Δύο ἀπέναντι πλευραὶ* ΑΒ, ΓΔ *τοῦ τετραπλεύρου συμπίπτουν* (Σχ. 746).

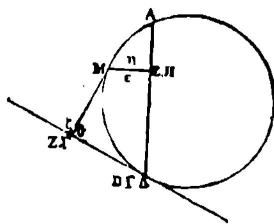
Ἐπανευρίσκομεν τὸ ἑπόμενον γνωστὸν θεώρημα:

1215 β. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου περιφερείας ἀπὸ δοθείσης χορδῆς αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.

Πράγματι, ἡ ἰσότης εθ = ζη ἀποβαίνει ἡ $ε^2 = ζη$.



Σχ. 746.



Σχ. 747.

3) *Τρεῖς κορυφαὶ* Β, Γ, Δ *συμπίπτουν* (Σχ. 747).
Ἡ περίπτωσις αὕτη δὲν παρουσιάζει ἐνδιαφέρον, ἂν καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι συμβαίνει ἀκόμη

$$εθ = ζη, \quad ἀφοῦ \quad ε = η \quad καὶ \quad θ = ζ.$$

1216. 3η Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα τοῦ Πάππου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ἀκόμη μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς ἐκ τῶν εἰδικῶν περιπτώσεών του (§ 1215 α, 2)), ἀποδεικνυομένης ἀπ' εὐθείας. (*Μέθοδοι*, § 25). Τὴν ἀπόδειξιν αὐτὴν θὰ χρησιμοποιήσωμεν δι' ἓν πολὺ γενικώτερον, ἀπὸ τὸ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, ζήτημα· τοῦτο δὲ θὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἁπλοῦν πόρισμα τῆς γενικωτέρας αὐτῆς προτάσεως (§ 1222).

Θεώρημα 359—I

1217. **Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου περιφερείας ἀπὸ δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν διαγωνίων.**

Ἀπόδειξις ἀνάλογος τῆς ἐν § 1214. Ἀρκεῖ ἄλλωστε νὰ θεωρηθοῦν αἱ διαγώνιοι ὡς δύο ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου.

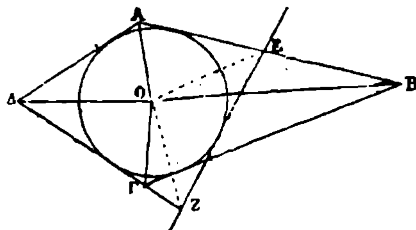
Θεώρημα 359—II

1217 α. (§§ 1214 καὶ 1217). **Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν ε' τέμνουσαν τὴν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν δοθεῖσαν α, δευτέραν εὐθεῖαν ζ' τέμνουσαν τὴν ΒΓ ὑπὸ γωνίαν β, τρίτην η' τέμνουσαν τὴν ΓΔ ὑπὸ γωνίαν γ καὶ τετάρτην θ' τέμνουσαν τὴν ΔΑ ὑπὸ γωνίαν δ, πάσας περατουμένας εἰς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τοῦ γινομένου τῶν ε' καὶ η', τῶν ἀντιστοίχων δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ζ' καὶ θ', τῶν ἀντιστοίχων τῶν δύο ἄλλων (ἢ τῶν διαγωνίων) εἶναι σταθερός.**

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἰδία πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ *Desargues*, (ἐπ. § 1219), τοῦ σχετικοῦ πρὸς τὴν ἀνέλιξιν.

Θεώρημα 359—III

1218. (Τὸ ἐναλλακτὸν τοῦ θεωρήματος τοῦ Πάππου). Εἰς πᾶν τετράπλευρον περιγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων μιᾶς μεταβλητῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἔχει λόγον σταθερὸν πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν. (Chasles).



Σχ. 748.

Ἂς εἶναι α, β, γ, δ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΕΖ. Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι: $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} =$ σταθερά.

Ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{εφ ΑΕΟ}}{\text{εφ ΒΕΟ}} = \frac{\text{ΑΟ . ημ ΑΟΕ}}{\text{ΒΟ . ημ ΒΟΕ}},$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{εφ ΓΖΟ}}{\text{εφ ΔΖΟ}} = \frac{\text{ΓΟ ημ ΓΟΖ}}{\text{ΔΟ ημ ΔΟΖ}},$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\text{ΑΟ . ΓΟ}}{\text{ΒΟ . ΔΟ}} \cdot \frac{\text{ημ ΑΟΕ . ημ ΓΟΖ}}{\text{ημ ΒΟΕ . ημ ΔΟΖ}}. \qquad (1)$$

Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΓΟΒ καὶ ΖΟΕ εἶναι ἴσαι (§ 739)· ἄρα

$$\text{γων. ΓΟΖ} = \text{ΒΟΕ},$$

αἱ δὲ γωνίαι ΖΟΕ καὶ ΑΟΔ παραπληρωματικαί, ἑπομένως καὶ

$$\text{ΑΟΕ} + \text{ΔΟΖ} = 180^\circ.$$

Εἶναι κατὰ συνέπειαν

$$\text{ημ ΑΟΕ} = \text{ημ ΔΟΖ}, \quad \text{ημ ΓΟΖ} = \text{ημ ΒΟΕ},$$

καὶ ἡ (1) ἀνάγεται εἰς τὴν

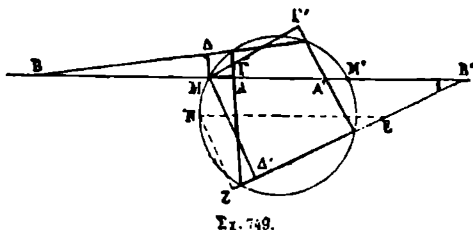
$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\text{ΑΟ . ΓΟ}}{\text{ΒΟ . ΔΟ}} = \text{σταθερὰ ποσότης.}$$

Θεώρημα τοῦ Desargues 360

1219. Ἔστω τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, ΜΜ' εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς Μ καὶ Μ' καὶ Α, Α', Β, Β'

τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῶν δύο ζευγῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου. Δείξατε ὅτι οἱ λόγοι $\frac{MA \,.\, MA'}{MB \,.\, MB'}$ καὶ $\frac{M'A \,.\, M'A'}{M'B \,.\, M'B'}$ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΓ, ΜΓ', ΜΔ, ΜΔ'



Σχ. 749.

ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου. Θὰ ἔχωμεν (§ 1214):

$$M\Gamma \,.\, M\Gamma' = M\Delta \,.\, M\Delta' \quad \text{ἢ} \quad \frac{M\Gamma \,.\, M\Gamma'}{M\Delta \,.\, M\Delta'} = 1. \qquad (1)$$

Θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι διὰ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν (ε) τῆς τεμνούσης ὁ λόγος $\frac{MA \,.\, MA'}{MB \,.\, MB'}$ εἶναι σταθερός, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Μ.

Πράγματι, κατὰ τὴν παραλλήλως πρὸς τὴν (ε) μετατόπισιν τῆς τεμνούσης ΜΜ', ἕκαστον τρίγωνον ὡς τὸ ΜΔ'Β' παραμένει ὅμοιον ἑαυτῷ. Διὰ $M \equiv N$ λ. χ. τὸ τρίγωνον ΝΖΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΜΔ'Β'. Ἑπομένως, θὰ εἶναι: ΜΒ' = ΜΔ' ἐπὶ σταθερόν τινα λόγον, μὴ ἐξαρτώμενον παρὰ μόνον ἐκ τῆς (σταθερᾶς) γωνίας Β'· ἐπειδὴ $\frac{MB'}{M\Delta'} = \frac{NE}{NZ}$, ὅθεν $MB' = M\Delta' . \frac{NE}{NZ}$. (Ὁ δὲ λόγος οὗτος $\frac{NE}{NZ}$ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας Β' ἢ $\frac{1}{\eta\mu B'}$)·

Ἂν λοιπὸν θέσωμεν $\frac{NE}{NZ} = \frac{1}{\beta'}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{MB'}{M\Delta'} = \frac{1}{\beta'} \quad \text{ἢ} \quad M\Delta' = MB' \,.\, \beta' \; (= MB' \,\eta\mu\, B').$$

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν :

$$M\Gamma' = MA' \,.\, \alpha', \quad M\Delta = MB \,.\, \beta, \quad M\Gamma = MA \,.\, \alpha.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ ΜΓ, ΜΓ', ΜΔ, ΜΔ' διὰ τῶν ἴσων των, ὡς ἀνωτέρω, λαμβάνομεν

$$\frac{MA \,.\, \alpha \times MA' \,.\, \alpha'}{MB \,.\, \beta \times MB' \,.\, \beta'} = 1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{MA \,.\, MA'}{MB \,.\, MB'} = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}.$$

Ἀλλ' ὡς εἴδομεν, ὁ λόγος $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}$ εἶναι σταθερὰ ποσότης, ἐξαρ-

τωμένη ἐκ τῆς διευθύνσεως μόνον τῆς τεμνούσης. Θὰ ἔχωμεν κατὰ συνέπειαν ἐπίσης

$$\frac{M'A \,.\, M'A'}{M'B \,.\, M'B'} = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'},$$

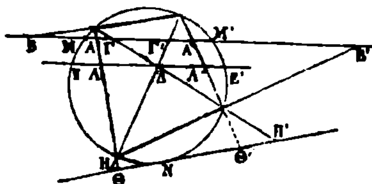
ἄρα καὶ

$$\frac{MA \,.\, MA'}{MB \,.\, MB'} = \frac{M'A \,.\, M'A'}{M'B \,.\, M'B'}.$$

1220. Ἐκ τοῦ *θεωρήματος τοῦ Desargues* συνάγομεν πλῆθος πορισμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἀναφέρωμεν τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα:

1) *Δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου δύναται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ δύο διαγωνίων αὐτοῦ.*

Τὰ τέσσαρα ζεύγη σημείων (Α,Α'), (Β,Β'), (Γ,Γ'), (Μ,Μ') λαμβανόμενα ἀνὰ τρία δίδουν ἓξ σημεῖα ἐν *ἐνελίξει* (βλ. κατωτέρω § 1221). Ὑπάρχουν τέσσαρες διάφοροι συνδυασμοί.



Σχ. 750.

2) *Ἐὰν ἡ διατέμνουσα* ΕΕ' (Σχ. 750). *διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἢ τῶν διαγωνίων, τὸ σημεῖον* Δ *εἶναι διπλοῦν σημεῖον (τῆς ἐνελίξεως).*

3) *Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σημεῖον* Δ *εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς* ΕΕ' *τὰ σημεῖα* Λ, Λ' *ἴσον ἀπέχουν τοῦ* Δ. *Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ διατέμνουσα τέμνει τὰς δύο ἄλλας ἀπέναντι πλευράς.*

4) *Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς* Ν *τῆς ἐφαπτομένης* ΗΗ' *εἶναι διπλοῦν σημεῖον.*

5) *Ἡ διατέμνουσα, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου* Δ *τῶν διαγωνίων καὶ τοῦ κοινοῦ* Α *δύο ἀπέναντι πλευρῶν, καὶ συναντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς* Μ *καὶ* Μ', *ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς τέσσαρα σημεῖα ἐν ἐνελίξει, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ* Α *καὶ* Δ *εἶναι διπλᾶ σημεῖα ταύτης.*

Θὰ ἔχωμεν: $$\frac{MA^2}{M\Delta^2} = \frac{M'A^2}{M'\Delta^2},$$

ἐπειδὴ τὰ Α, Α' συμπίπτουν, ὡς καὶ τὰ Δ, Δ'.

Ἡ πρότασις 5) ἀνάγεται εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{MA}{M'A} = \frac{M\Delta}{M'\Delta},$$

δηλ. ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Δ.

1221. Σημείωσις ἐπὶ τῆς ἐνελίξεως. Τὸ *θεώρημα τοῦ Desargues* εἶναι θεμελιῶδες διὰ τὴν *θεωρίαν τῆς ἐνελίξεως.*

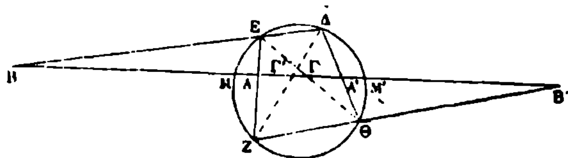
Ἡ ἰσότης $$\frac{MA \,.\, MA'}{MB \,.\, MB'} = \frac{M'A \,.\, M'A'}{M'B \,.\, M'B'} \qquad (1)$$

ἡ συνδέουσα ὀκτὼ μήκη, δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν σχέσιν μὲ ἓξ μόνον μήκη:

$$AB' \,.\, BM' \,.\, MA' = A'B \,.\, B'M \,.\, M'A. \qquad (2)$$

Διὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ τύπου (1) εἰς τὸν (2) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἰδιότητας τοῦ *ἀναρμονικοῦ λόγου*. (Βλ. Chasles, *Géométrie supérieure*, κεφ. IX, n° 184).

Λέγομεν ὅτι ἕξ σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς εὑρίσκονται *ἐν ἑνελίξει*, ἐὰν τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν τμημάτων, ἐκ



Σχ. 751.

τῶν ὁριζομένων ὑπ' αὐτῶν, μὴ ἐχόντων κοινὸν πέρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων.

Ἡ *ἐνέλιξις* εἶναι μέθοδος πολὺ γόνιμος, κυρίως διὰ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν. Ὁ Desargues ἔθεσε τὸ θεμελιῶδες θεώρημα αὐτῆς καὶ τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Pascal εἰς τὸ ἔργον του *Essai sur les coniques*. Ὁ Chasles συνέθεσε τὴν ἐνέλιξιν μετὰ τῆς θεωρίας τοῦ *ἀναρμονικοῦ λόγου*.

Τὰ σπουδαιότερα ἔργα τὰ ὁποῖα δύναταί τις νὰ συμβουλευθῇ σχετικῶς εἶναι τὰ ἑπόμενα:

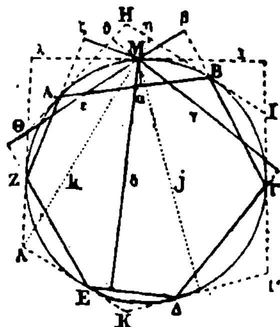
Chasles, *Géométrie supérieure*.—Housel, *Introduction à la Géométrie supérieure*.—Cremona, *Géométrie projective*.—J. Lenthéric, *Exposition élémentaire de la Géométrie moderne*. Τὰ τελευταῖα δύο ἔργα ἀλληλοσυμπληροῦνται· τὸ πρῶτον εἶναι περιγραφικὸν κυρίως, ἐνῷ τὸ δεύτερον χρησιμοποιεῖ, κατ' ἀρχήν, ἀλγεβρικὰς σχέσεις.

Γνωστὸν εἶναι ἐπίσης τὸ ὡραῖον Συμπλήρωμα, τὸ συνημμένον εἰς τὸ VIII Βιβλίον τοῦ *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse (7η ἔκδοσις).

Ἡ *Introduction à l'étude de l'homographie*, τέλος, τοῦ Raynaud εἶναι βιβλίον τελείως στοιχειῶδες.

Θεώρημα 360—I

1222. **Ἐὰν πολύγωνον ἀρτίου πλήθους 2ν πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀπὸ ν πλευρῶν, μὴ ἐχουσῶν κοινὰ ἄκρα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τῶν ν ἄλλων πλευρῶν.**



Σχ. 752.

Ἂς θεωρήσωμεν, διὰ τὴν ἁπλότητα, ἑξάγωνα.

Ἂς εἶναι α, β, γ, δ, ε, ζ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, θ, η, ι, j, κ, λ δὲ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου ἑξαγώνου, κατὰ τὸ σχῆμα 752.

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τυχούσης χορδῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς (§ 25). Κατὰ συνέπειαν:

$$\alpha^2 = \theta\eta, \quad \beta^2 = \eta\iota, \quad \gamma^2 = \iota j,$$

$$\delta^2 = j\kappa, \quad \varepsilon^2 = \kappa\lambda, \quad \zeta^2 = \lambda\theta\cdot$$

ἄρα $\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2 = \theta\eta\iota j\kappa\lambda, \quad \beta^2\delta^2\zeta^2 = \eta\iota\,.\,j\kappa\,.\,\lambda\theta,$

ἢ $\alpha\gamma\varepsilon = \beta\delta\zeta.$

1223. Ἐὰν τὸ πολύγωνον ἔχῃ $2\nu-1$ πλευράς, διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος, δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς 2ν πλευρῶν, φέροντες διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του ἐφαπτομένην (Βλ. § 1215).

Θεώρημα 360—II

1224. **Ἐὰν ἓν πολύγωνον ἔχῃ διὰ κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν καὶ τυχόντος πλήθους πλευρῶν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου.**

Ἂς εἶναι α, β, γ, δ, ε αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ θ, η, ι, j, κ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου.

Ὡς προηγουμένως, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2 = \eta\theta, \quad \beta^2 = \eta\iota; \quad \gamma^2 = \iota j, \quad \delta^2 = j\kappa, \quad \varepsilon^2 = \kappa\theta\cdot$$

ἄρα: $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \eta\theta\iota j\kappa.$

Θεώρημα 360—III

1225. 1) Ἡ αὐτὴ ἐκφώνησις διὰ τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον (§ 1224).

Ἐὰν φέρωμεν τέμνουσαν ΜΜ΄ τῆς περιφερείας κατὰ δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ παραστήσωμεν διὰ α, β ... ε, θ, η ... τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς Μ ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων καθ' ἃ ἡ τέμνουσα συναντᾷ τὰς πλευράς, ὁ λόγος $\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{\theta\eta\iota j\kappa}$ θὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

2) **Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α΄, β΄ ... θ΄, η΄ ... τὰς ἀποστάσεις τοῦ δευτέρου σημείου Μ΄ τομῆς τῆς τεμνούσης καὶ τῆς περιφερείας, ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ τὰς πλευράς, οἱ δύο λόγοι:**

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{\theta\eta\iota j\kappa} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'}{\theta'\eta'\iota' j'\kappa'},$$

θὰ εἶναι ἴσοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ διεύθυνσις τῶν τεμνουσῶν.

Παρατήρησις. Ὡς βλέπομεν, ἡ βασικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου (§ 1219, 1221), ἡ σχετικὴ πρὸς τὴν ἑνέλιξιν, ἐπεκτείνεται εἰς ἓν τυχὸν ἐγγράψιμον πολύγωνον (§ 1225, 2)).

Διατέμνουσαι

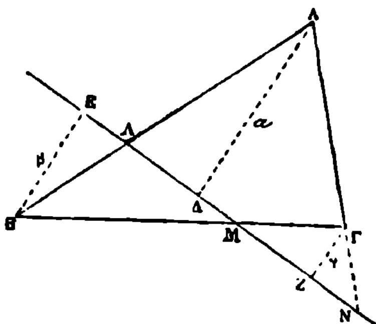
1226. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τρία σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι πολλάκις πολὺ χρήσιμον νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὰ θεωρήματα τῶν *Μενελάου* καὶ *Céva*. Ἡ ἀπόδειξις ἄλλωστε τῶν δύο θεμελιωδῶν αὐτῶν θεωρημάτων εἶναι τόσον ἁπλῆ.

Θεώρημα τοῦ Μενελάου 361

1227. Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνῃ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, τὸ γινόμενον τριῶν τμημάτων (ἐκ τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου διὰ τῶν σημείων τομῆς καὶ τῶν κορυφῶν) μὴ ἐχόντων κοινὸν πέρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων.

Ἡ ἀπόδειξις ἡ ὁποία δίδεται εἰς τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας (G. 743), βασίζεται ἐπὶ τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν.

Εἰς τὰς *Μεθόδους* (§ 166), ἐχρησιμοποιήθησαν αἱ βοηθητικαὶ ἐπιφάνειαι. Εἰς τὴν § 180, ἡ ἀπόδειξις, ἄκρως ἁπλῆ, στηρίζεται ἐπὶ τῶν προβολῶν καὶ εὑρίσκεται εἰς τὸ *Traité des propriétés projectives* τοῦ Poncelet.



Σχ. 753.

Ἡ ἑπομένη, τέλος, ἀπόδειξις δὲν ὑστερεῖ εἰς κομψότητα καὶ ἁπλότητα οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων.

Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν φέρομεν τρεῖς εὐθείας παραλλήλους μεταξύ των, καθέτους λ. χ. ἐπὶ τὴν διατέμνουσαν, καὶ τῶν ὁποίων τὰ μήκη μέχρι τῆς διατεμνούσης ἂς εἶναι α, β, γ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}=\frac{α}{β}, \quad \frac{ΒΜ}{ΓΜ}=\frac{β}{γ}, \quad \frac{ΓΝ}{ΑΝ}=\frac{γ}{α}$$

καὶ ἡ δεικτέα σχέσις

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}\cdot\frac{ΒΜ}{ΓΜ}\cdot\frac{ΓΝ}{ΑΝ}=1$$

ἀνάγεται εἰς τὴν προφανῆ

$$\frac{α}{β}\cdot\frac{β}{γ}\cdot\frac{γ}{α}=1.$$

Ἀντίστροφον θεώρημα 362

1228. Ἐὰν τρία σημεῖα ὁρίζουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου τρία τμήματα ([68]) τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τριῶν μὴ διαδοχικῶν νὰ εἶναι ἴσον

---

68. Σημ. μετ. Ὡς τὰ προηγούμενα τῆς § 1227.

πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

Ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν, ἢ ἓν μόνον θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς πλευρᾶς ἢ καὶ τὰ τρία θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν χρησιμοποιεῖται ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγὴ (Νικ., Σ. Γ., § 39).

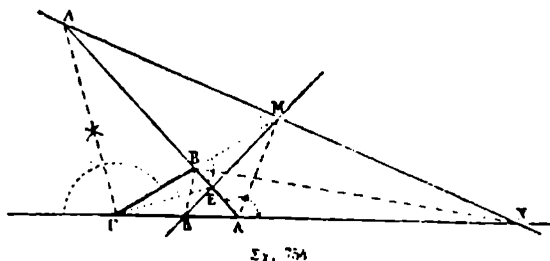
Θεώρημα τοῦ Carnot 362—I

1229. Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν ἐπιπέδου πολυγώνου ὑπὸ εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου του ὁρίζουν ἐπὶ ἑκάστης αὐτῶν δύο τμήματα. Τὸ γινόμενον ὅλων τῶν τμημάτων, τῶν μὴ ἐχόντων κοινὰ πέρατα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τμημάτων.

(*Μέθοδοι*, § 181).

Θεώρημα 363

1230. 1) Αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου συναντοῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα.



Σχ. 734

Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Λ, κλπ. Θὰ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἂς εἶναι α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Τὰ τμήματα ΑΛ, ΒΛ, τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς διχοτόμου ΓΛ, εἶναι ἀνάλογα τῶν πλευρῶν ΓΑ καὶ ΓΒ. Ἄρα

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}=\frac{β}{α}\cdot \text{ ἀναλόγως, } \frac{ΒΜ}{ΓΜ}=\frac{γ}{β},\quad \frac{ΓΝ}{ΑΝ}=\frac{α}{γ},$$

καὶ ἐπομένως

$$\frac{ΑΛ}{ΒΛ}\cdot\frac{ΒΜ}{ΓΜ}\cdot\frac{ΓΝ}{ΑΝ}=\frac{βαγ}{αβγ}=1.$$

Κεῖνται δηλ. τὰ Λ, Μ, Ν σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

2) *Οἱ πόδες* Δ, Ε *δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ ὁ πούς* Μ *τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς τρίτης γωνίας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

Ἡ ἀπόδειξις ὡς καὶ προηγουμένως (§ 1230).

Παρατήρησις. Σχετικῶς πρὸς τὰ θεωρήματα αὐτὰ δύναταί τις νὰ ἀνατρέξῃ εἰς τὴν *Géométrie Supérieure* τοῦ Chasles, n° 394.

Θεώρημα 363—I

1231. Ἀντίστροφοι διατέμνουσαι. Μία διατέμνουσα τέμνει τὰς πλευρὰς α, β, γ τριγώνου εἰς τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν καὶ ἔστωσαν Λ', Μ', Ν', τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων αὐτῶν πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων ἀντιστοίχως κεῖνται. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Λ', Μ', Ν' εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας.

Ἡ σχέσις
$$\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΒΛ}}\cdot\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΓΜ}}\cdot\frac{\text{ΓΝ}}{\text{ΑΝ}}=1,$$
συνεπάγεται εὐκόλως καὶ τὴν
$$\frac{\text{ΑΛ}'}{\text{ΒΛ}'}\cdot\frac{\text{ΒΜ}'}{\text{ΓΜ}'}\cdot\frac{\text{ΓΝ}'}{\text{ΑΝ}'}=1,$$
ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι τὰ τρία νέα σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1231 α. ***Σημείωσις.*** Τὰ σημεῖα Λ, Λ', συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς α κλπ., ἐκλήθησαν *ἰσοτομικά*· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΛ, ΑΛ', *ἰσοτομικαὶ εὐθεῖαι*. (Βλ. ἐπμ. § 2329).

Αἱ διατέμνουσαι ΛΜΝ, Λ'Μ'Ν', ὀνομάζονται *ἀντίστροφοι διατέμνουσαι*.

Ἡ Θεωρία τῶν ἀντιστρόφων διατεμνουσῶν ὀφείλεται εἰς τὸν G. de Longchamps (1866). Ἀπὸ τότε ὁ σοφὸς οὗτος συγγραφεὺς ἔδωσε ἐνδιαφερούσας καὶ πολυαρίθμους ἐφαρμογὰς τῆς θεωρίας αὐτῆς. Σχετικῶς βλέπε: *J. d. M. Élém.*, 1880, σ. 272· *J. d. M. Spéciales*, 1882, σ. 25· *Trasformations réciproques*, ἴδιον ἔτος σ. σ. 49, 77, 97 καὶ 121.

Ἐπίσης, τὸ 1885: *Essai sur la Géométrie de la règle et du Compas*· τὸ 1886: *Généralités de la Géométrie du triangle*.

Θεώρημα 363—II

1231 β. Δοθεῖσα διατέμνουσα ΔΕΖ τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ διαιρεῖ αὐτὰς κατὰ τοὺς λόγους:
$$\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}=\frac{\mu}{\nu},\quad \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}}=\frac{\lambda}{\rho},\quad \frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}}=\frac{\kappa}{\sigma}.$$

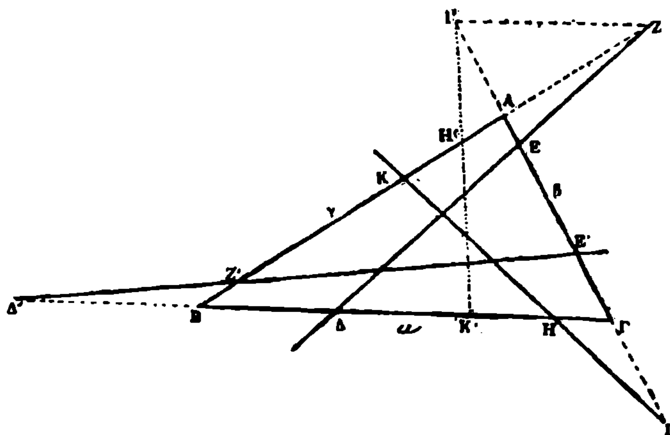
Δείξατε, ὅτι ἐὰν τὸ σημεῖον Ε' διαιρῇ τὴν ΓΑ κατὰ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, τὸ Ζ' τὴν ΑΒ κατὰ τὸν $\frac{\lambda}{\rho}$ καὶ τὸ Δ' τὴν ΒΓ κατὰ τὸν $\frac{\kappa}{\sigma}$, τὰ τρία σημεῖα Ε', Ζ', Δ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐκφράζοντες ἕκαστον τῶν ἕξ πρώτων τμημάτων συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ἐφ' ἧς κεῖται καὶ τοῦ ἀντιστοίχου λόγου, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}}$, $\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΑ}}$, $\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}}$ διὰ τῶν ἴσων των $\frac{\alpha\mu}{\alpha\nu}$, $\frac{\beta\lambda}{\beta\rho}$, $\frac{\gamma\kappa}{\gamma\sigma}$ ἀντιστοίχως.

Ἡ σχέσις τοῦ Μενελάου διὰ τὴν διατέμνουσαν ΔΕΖ γράφεται
$$\frac{\alpha\mu}{\alpha\nu}\cdot\frac{\beta\lambda}{\beta\rho}\cdot\frac{\gamma\kappa}{\gamma\sigma}=-1. \qquad (1)$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, εἶναι ἡ πλευρὰ β ἥτις διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Ε′ κατὰ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, ἡ γ ὑπὸ τοῦ Ζ′ κατὰ τὸν $\frac{\lambda}{\rho}$ καὶ ἡ α ὑπὸ τοῦ Δ′ κατὰ τὸν $\frac{\kappa}{\sigma}$. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑπομένως τῆς προτάσεως θὰ πρέπει νὰ συμβαίνῃ:

$$\frac{\alpha\kappa}{\alpha\sigma}\cdot\frac{\beta\mu}{\beta\nu}\cdot\frac{\gamma\lambda}{\gamma\rho}=-1. \qquad (2)$$



Σχ. 755.

Ἀλλὰ ἡ σχέσις αὕτη ἀληθεύει, ἀφοῦ κοινὴ τιμὴ αὐτῆς καὶ τῆς καθ' ὑπόθεσιν ἀληθοῦς (1) εἶναι τὸ γινόμενον τῶν λόγων

$$\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\lambda}{\rho}\cdot\frac{\kappa}{\sigma}.$$

1231 γ. Παρατήρησις. Δοθέντων τῶν τριῶν λόγων καὶ ἀκολουθοῦντες μίαν ὡρισμένην φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τρεῖς διαφόρους διατεμνούσας. Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν ἀντίθετον φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου, εὑρίσκομεν τρεῖς ἄλλας διατεμνούσας, ἀντιστρόφους τῶν πρώτων.

Ὑπάρχουν, ἑπομένως, ἓξ τριάδες ὁμογραμμικῶν σημείων.

Ἀνάλογος ἐπέκτασις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Céva*. Ὑπάρχουν δηλ. ἓξ σημεῖα τομῆς (τριῶν εὐθειῶν κλπ.), καθοριζομένων δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.

Θεώρημα 363—III

1232. Ἡ διάμεσος ΑΔ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν χορδὴν ΕΖ τόξου, ἔχοντος κέντρον τὴν κορυφὴν Α, εἰς δύο μέρη, ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. (Housel, Introduction à la Géométrie supérieure, σ. 175).

Ἂς προεκτείνωμεν τὴν ΕΖ μέχρι τῆς τομῆς της Η μετὰ τῆς ΒΓ καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα ΘΕΗ, ΓΖΗ, τῶν ὁποίων διατέμνουσα εἶναι ἡ ΑΔ. Θὰ ἔχωμεν:

$$ΗΔ \cdot ΒΑ \cdot ΕΘ = ΒΔ \cdot ΕΑ \cdot ΗΘ,$$

$$ΓΔ \cdot ΖΑ \cdot ΗΘ = ΗΔ \cdot ΓΑ \cdot ΖΘ.$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη τὰς δύο ταύτας ἰσότητας καὶ διαιροῦμεν διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων ΗΔ, ΗΘ καὶ τῶν ἴσων ΑΕ, ΑΖ καὶ ΒΔ, ΓΔ. Εὑρίσκομεν:

$$ΒΑ \cdot ΕΘ = ΓΑ \cdot ΖΘ,$$

Σχ. 756.

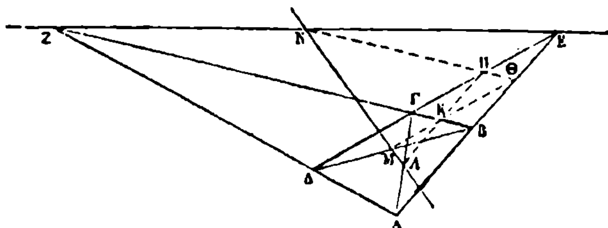
δηλ.
$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΖΘ}{ΕΘ}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ΑΔ ἀχθῇ εἰς τρόπον, ὥστε $\frac{ΓΔ}{ΒΔ} = \frac{ΒΑ}{ΓΑ}$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{ΖΘ}{ΕΘ} = \frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}$.

Θεώρημα 364

***1233.* Τὰ μέσα τῶν τριῶν διαγωνίων ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.** (Gauss, 1810).

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας, θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον ΘΗΚ τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν ἀνὰ δύο τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΓΕ.



Σχ. 757.

Ἡ πλευρὰ ΗΚ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΑΓ, ἡ ΘΚ διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ καὶ ἡ ΘΗ διὰ τοῦ Ν.
Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$\frac{ΘΜ}{ΚΜ} \cdot \frac{ΚΛ}{ΗΛ} \cdot \frac{ΗΝ}{ΘΝ} = 1. \qquad (§ 1228)$$

Ἕκαστον τῶν ἓξ τμημάτων τῆς σχέσεως ταύτης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΑΔΖ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΓΕ. Πράγματι, $ΘΜ = \frac{1}{2} ΕΔ$, $ΚΜ = \frac{1}{2} ΓΔ$ κλπ. Εἶναι, ἐπομένως, ἡ σχέσις

αὕτη ἀληθής, ἀφοῦ τὰ διπλασίου μήκους ἀντίστοιχα τμήματα, τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς διατεμνούσης ΑΔΖ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ΒΓΕ, πληροῦν ἀνάλογον σχέσιν.

Κεῖνται συνεπῶς τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

1233 α. Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἐδόθη ὑπὸ τοῦ J. Mention εἰς τὰ N. A., 1853, σ. 420 καὶ εἶναι ταχυτέρα καὶ πλέον κομψὴ ἀπὸ τὴν τοῦ Bobillier. Ἡ τελευταία αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸ *Appendice aux Éléments de Géométrie* τοῦ Blanchet.

Ἡ εὐθεῖα ΛΜΝ ὀνομάζεται πολλάκις καὶ *εὐθεῖα τοῦ Νεύτωνος*· εὑρίσκεται ὅμως καὶ ὁ ὅρος *εὐθεῖα τοῦ Gauss* τοῦ τετραπλεύρου.

(*Mathesis*, 1902, σ. 170, ζήτημ. 1188, 1906, σ. 143, n° 1278). Βλέπε ἐπίσης *Die Elemente der Mathematik*, τοῦ Baltzer ἢ *Elementi di Mathematica* τοῦ ἰδίου, § 7, n° 5.

Θεώρημα τοῦ Rochat 364—1

1233 β. Εἰς πᾶν πλῆρες τετράπλευρον, αἱ τρεῖς διαγώνιοι δύνανται νὰ ληφθοῦν, ἀνὰ δύο, κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους καὶ νὰ θεωρήσωμεν οὕτω τρία ἁπλᾶ τετράπλευρα. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν *κέντρον* ἑνὸς τετραπλεύρου τὸ κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων κορυφῶν του, εὑρίσκομεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

1) *Τὰ μέσα τῶν τριῶν διαγωνίων κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.* (§ 1233).

2) *Ἡ εὐθεῖα τῶν μέσων τῶν διαγωνίων διέρχεται καὶ διὰ τῶν κέντρων τῶν τριῶν ἁπλῶν τετραπλεύρων. Ἐξ οὕτω σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

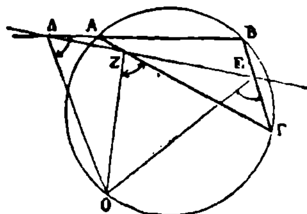
3) *Ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων δύο τυχουσῶν διαγωνίων εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν δύο ἁπλῶν τετραπλεύρων, εἰς ἃ αἱ διαγώνιοι αὗται ἀνήκουν.*

Σημείωσις. Τὸ ὄνομα *Θεώρημα τοῦ Rochat* ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Gergonne. (*Analles*, τόμ. I, 1810—1811, σ. 314).

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως αὐτῆς ἀνήκει, ὡς εἴδομεν, εἰς τὸν Gauss (§ 1233).

Θεώρημα 365

1234. *Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον ἀχθοῦν εὐθεῖαι, σχηματίζουσαι μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου γωνίας ἴσας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, οἱ πόδες τῶν εὐθειῶν τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*



Σχ. 758.

Ἄς εἶναι

γων. $\Gamma E O = \Gamma Z O = B \Delta O$.

Τὰ τρίγωνα ΓΟΕ, ΑΟΔ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ $E = \Delta$ καὶ αἱ γωνίαι ΔΑΟ, ΕΓΟ ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας ΒΑΟ. Ἐπομένως,

$$\frac{A\Delta}{\Gamma E} = \frac{AO}{\Gamma O}. \qquad (1)$$

Τὰ τρίγωνα ΟΒΕ, ΑΟΖ εἶναι ἐπίσης ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ Α καὶ Β γωνίαι των εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Ἄρα

$$\frac{BE}{AZ} = \frac{BO}{AO}. \qquad (2)$$

Καὶ τὰ τρίγωνα τέλος ΓΟΖ, ΒΟΔ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ αἱ γωνίαι αὐτῶν Ζ καὶ Δ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΟΓΖ, ΟΒΔ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἄρα

$$\frac{ΓΖ}{ΒΔ}=\frac{ΓΟ}{ΒΟ}. \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς τρεῖς εὑρεθείσας ἰσότητας, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΔ}{ΒΔ}\cdot\frac{ΒΕ}{ΓΕ}\cdot\frac{ΓΖ}{ΑΖ}=\frac{ΑΟ}{ΓΟ}\cdot\frac{ΒΟ}{ΑΟ}\cdot\frac{ΓΟ}{ΒΟ}=1,$$

ἥτις δεικνύει ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (§ 1228).

1235. *Παρατηρήσεις.* 1) Τὸ θεώρημα τοῦ *Robert Simson* ἢ τοῦ *Wallace* (§ 22) εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου, ἡ ἐπέκτασίς του δὲ (§ 1234) ὀφείλεται εἰς τὸν Carnot.

2) Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως εἶναι ἄμεσος, ἐὰν ἔχῃ τις ὑπ' ὄψιν τὰς προτάσεις ἐπὶ τῶν *ἰσοκλινῶν εὐθειῶν* (§ 2457 καὶ ἑπμ.), δηλ. τῶν εὐθειῶν διὰ τοῦ σημείου Ο, αἵτινες τέμνουν τὰς πλευρὰς πολυγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου.

Θὰ ἦτο ἀρκετὸν νὰ ἐλέγομεν :

Αἱ κάθετοι, αἱ ἀγόμεναι ἐξ ἑνὸς σημείου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον, σχηματίζουν ποδικὸν τρίγωνον ἀναγόμενον εἰς εὐθεῖαν· τὸ αὐτό, ἑπομένως, συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἰσοκλινεῖς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὰς ἀγομένας ὑπὸ κλίσιν τυχοῦσαν. (Βλ. ἑπμ. § 2464).

3) Τὸ θεώρημα τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸ Salmon (§ 766), ἐπιδέχεται τὴν ἑπομένην ἐπέκτασιν:

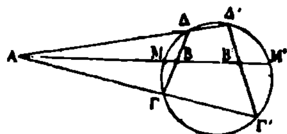
Ἐὰν ἐπὶ τριῶν χορδῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ (Σχ. 758) διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο γράψωμεν τόξα δεχόμενα τὴν αὐτὴν γωνίαν α, αἱ περιφέρειαι, εἰς ἃς ἀνήκουν τὰ τόξα ταῦτα, τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ ἓξ ἄλλα σημεῖα κείμενα, ἀνὰ τρία, ἐπὶ δύο εὐθειῶν.

Θεώρημα 365—I

1236. Δίδονται περιφέρεια καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τοῦ δευτέρου σημείου φέρομεν χορδὴν τυχοῦσαν ΓΒΔ καὶ διὰ τοῦ πρώτου τὰς τεμνούσας ΑΓΓ', ΑΔΔ'.

Δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ Γ'Δ' διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (Poncelet, Application d'Analyse et de Géométrie).

1η Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζοντες τὴν *ὁμολογίαν* (§ 1249), ἀπομακρύνομεν τὸ σημεῖον Α εἰς ἄπειρον, αἱ εὐθεῖαι ΔΔ', ΓΓ' ἀποβαίνουν παράλληλοι πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἐντὸς τῆς περιφερείας σχῆμα εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Τούτου ἡ πλευρὰ Γ'Δ' διέρχεται, προφανῶς, διὰ σταθεροῦ σημείου Β', συμμετρικοῦ τοῦ Β πρὸς τὴν διάμετρον τὴν κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις.



Σχ. 759.

Εἰς τὸ ἀρχικὸν σχῆμα, ἑπομένως, ἡ πλευρὰ Γ'Δ' θὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ ἐπίσης σημείου.

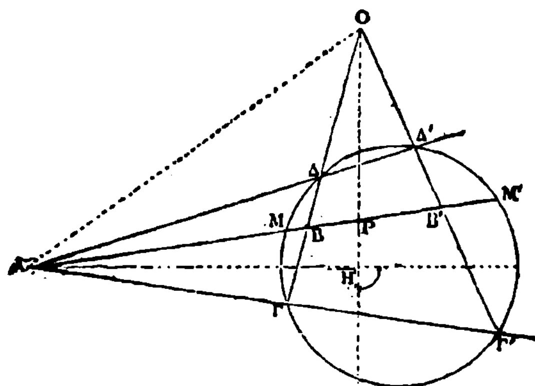
2α *Ἀπόδειξις*. (Σχ. 759). Τὸ *Θεώρημα τοῦ Desargues*, τὸ σχετικὸν πρὸς τὴν ἐνέλιξιν (§ 1219), ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀπόδειξιν χωρὶς νὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν ὁμολογίαν:

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ κοινὸν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, θὰ εἶναι διπλοῦν σημεῖον τῆς ἐνελίξεως τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημείων. Ἑπομένως

$$\frac{MA^2}{MB.MB'}=\frac{M'A^2}{M'B.M'B'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{M'B'}{MB'}=\frac{M'A^2.MB}{M'B.MA^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεξιὰ μέλος τῆς δευτέρας ἰσότητος εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, ὁ λόγος $\frac{M'B'}{MB'}$ θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ σημεῖον Β′ ὡρισμένον κατὰ θέσιν.

1237. 3η *Ἀπόδειξις*. (Σχ. 760). Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν



Σχ. 760.

ΓΔ καὶ Γ′Δ′, Ρ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ πολικὴ τοῦ Α συναντᾷ τὴν ΑΒ′. Ἡ πολικὴ αὐτὴ ΗΡ διέρχεται διὰ τοῦ Ο, ἡ δὲ τετρὰς τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΔΒΓ, ΟΡ, ΟΔ′Β′Γ′ εἶναι ἁρμονική. Εἶναι, ἐπομένως, ἁρμονικὴ καὶ ἡ τετρὰς τῶν σημείων Α, Β, Ρ, Β′, καθ' ἃ ἡ τετρὰς τῶν εὐθειῶν τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· καὶ ἐπειδὴ τρία τούτων, τὰ Α, Β, Ρ, εἶναι σταθερὰ σημεῖα, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ τέταρτον Β′ θὰ εἶναι σταθερὸν σημεῖον. (Κατὰ τὴν *J. M. E.*, 1890, σ. 208, Sollertinsky).

Θεώρημα 365—II

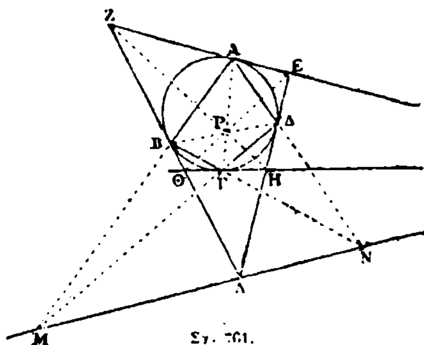
1237 α. **Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν. Τὰ ζεύγη τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου τέμνονται ἐπὶ τῆς τρίτης διαγωνίου τοῦ τετραπλεύρου Θεωρ.**

Πρόκειται περὶ ἁπλοῦ πορίσματος τοῦ Θεωρήμ. *τοῦ Pascal* (§ 1117 γ). Αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΛ, ΔΛ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΜΝ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας ΖΑΕ καὶ ΘΓΗ.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ σημεῖον τομῆς Ρ τῶν διαγωνίων τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου, ἢ τὸ *σημεῖον τοῦ Brianchon* (G. n° 807),

εἶναι ὁ πόλος τῆς *εὐθείας* ΜΝ *τοῦ Pascal* τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

2) Αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν ΑΓ, ΒΔ διέρχονται διὰ τοῦ Ρ.

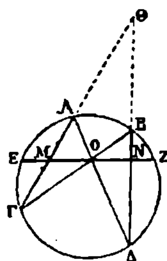


Σχ. 761.

1237 β. Ἐπέκτασις. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν ἀπειρίαν κωνικῶν τομῶν: *Τὰ ζεύγη τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπύλων τούτων, τῶν ἀγομένων εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου, τέμνονται ἐπὶ τῆς τρίτης διαγωνίου αὐτοῦ.* Ἐπειδὴ τὰ θεωρήματα τοῦ Pascal καὶ τοῦ Brianchon ἰσχύουν διὰ τυχοῦσαν κωνικὴν τομήν.

Θεώρημα 366

1238. Δύο χορδαὶ περιφερείας ΑΔ, ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ μέσον Ο τρίτης ΕΖ. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα ΟΜ, ΟΝ, τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς ΕΖ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ, εἶναι ἴσα.



Σχ. 762.

1η Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας, μολονότι δυνατή, εἶναι μακρὰ καὶ κοπιώδης καὶ κρίνομεν περιττὸν νὰ τὴν ἀναπτύξωμεν ἐδῶ, δεδομένου ὅτι εὑρίσκεται εἰς προηγουμένας ἐκδόσεις τῶν *Ἀσκήσεων Γεωμετρίας* (2α καὶ 3η).

2α Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ *Θεώρημα τοῦ Μενελάου* διὰ τὰς διατεμνούσας (§ 1227).

Αἱ διατέμνουσαι ΒΓ καὶ ΑΔ τοῦ τριγώνου ΜΘΝ δίδουν τὰς σχέσεις

$$\frac{\text{ΟΜ}}{\text{ΟΝ}}\cdot\frac{\text{ΒΝ}}{\text{ΒΘ}}\cdot\frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΓΜ}}=1$$

$$\frac{\text{ΟΜ}}{\text{ΟΝ}}\cdot\frac{\text{ΔΝ}}{\text{ΔΘ}}\cdot\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΑΜ}}=1.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{\text{ΟΜ}^2}{\text{ΟΝ}^2}\cdot\frac{\text{ΒΝ}\,.\,\text{ΔΝ}}{\text{ΓΜ}\,.\,\text{ΑΜ}}\cdot\frac{\text{ΓΘ}\,.\,\text{ΑΘ}}{\text{ΒΘ}\,.\,\text{ΔΘ}}=1.$$

Τὸ τελευταῖον κλάσμα ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ἀφοῦ

$$\Gamma\Theta \,.\, \mathrm{A}\Theta = \mathrm{B}\Theta \,.\, \Delta\Theta.$$

Ἄρα

$$\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{ON}^2} = \frac{\mathrm{AM}\,.\,\Gamma\mathrm{M}}{\mathrm{BN}\,.\,\Delta\mathrm{N}}.$$

Ἐπειδὴ δέ :

$$\frac{\mathrm{AM}\,.\,\Gamma\mathrm{M}}{\mathrm{BN}\,.\,\Delta\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{ME}\,.\,\mathrm{MZ}}{\mathrm{NE}\,.\,\mathrm{NZ}} = \frac{(\mathrm{OE}-\mathrm{OM})(\mathrm{OE}+\mathrm{OM})}{(\mathrm{OE}-\mathrm{ON})(\mathrm{OE}+\mathrm{ON})},$$

ἀφοῦ $\mathrm{OE} = \mathrm{OZ}$, ἕπεται

$$\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{ON}^2} = \frac{\mathrm{OE}^2 - \mathrm{OM}^2}{\mathrm{OE}^2 - \mathrm{ON}^2},$$

ἢ

$$\mathrm{OE}^2(\mathrm{OM}^2 - \mathrm{ON}^2) = 0$$

δηλ.

$$\mathrm{OM} = \mathrm{ON}.$$

3η Ἀπόδειξις. (Σχ. 762). Ἡ πρότασις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ *Desargues* ἐπὶ τῆς ἐνελίξεως (§ 1219). Κατ' αὐτό, θεωροῦντες τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τὰς ΑΔ, ΒΓ ὡς διαγωνίους αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\mathrm{EM}\,.\,\mathrm{EN}}{\mathrm{EO}\,.\,\mathrm{EO}} = \frac{\mathrm{ZM}\,.\,\mathrm{ZN}}{\mathrm{ZO}\,.\,\mathrm{ZO}},$$

ἤ, ἀφοῦ

$$\mathrm{EO} = \mathrm{ZO},$$

$$\mathrm{EM}\,.\,\mathrm{EN} = \mathrm{ZM}\,.\,\mathrm{ZN},$$

ἐξ ἧς

$$\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ZN}} = \frac{\mathrm{ZM}}{\mathrm{EN}},$$

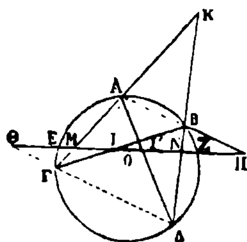
ἢ

$$\frac{\mathrm{EM}+\mathrm{ZM}=\mathrm{EZ}}{\mathrm{ZM}} = \frac{\mathrm{ZN}+\mathrm{EN}=\mathrm{EZ}}{\mathrm{EN}}.$$

Ἄρα

$$\mathrm{ZM} = \mathrm{EN} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{OM} = \mathrm{ON}.$$

4η Ἀπόδειξις. Αὕτη ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς θεωρίας τῶν πόλων καὶ πολικῶν καὶ ἁρμονικῶν τετράδων. (G. n° 803).



Σχ. 763.

1239. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς :

Αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἀποτέμνουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς καθέτου, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων, ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ κέντρου.

2) Διὰ τοῦ *θεωρήματος τοῦ Desargues* εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ὅτι ἡ πρότασις ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι' (Σχ. 763), ἀντὶ νὰ συμπίπτουν, ἴσον ἀπέχουν τοῦ μέσου Ο τῆς χορδῆς.

3) Εἶναι ἐπίσης (Σχ. 763)

$$\mathrm{O}\Theta = \mathrm{OH}.$$

καὶ ἀρκεῖ ὅπως ἓν ἐκ τῶν τριῶν τμημάτων ΙΙ', ΜΝ, ΘΗ ἔχῃ μέσον συμπῖπτον πρὸς τὸ σημεῖον Ο, ἵνα τὸ αὐτὸ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο τμήματα.

1239 α. Σημείωσις. 1) Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δεικνύει τὸ ἐνδιαφέρον ποὺ παρουσιάζει ἡ σπουδὴ μερικῶν βασικῶν θεωρημάτων, ὡς εἶναι τὸ τοῦ *Μενελάου* διὰ τὰς διατεμνούσας, τοῦ Desargues διὰ τὰ τρία ζεύγη σημείων ἐν ἐνελίξει (§ 1219) ἢ τοῦ Céva διὰ τρεῖς εὐθείας τεμνομένας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ 1240). Πράγματι, μία ἁπλῆ εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς ἐκ τῶν γενικωτέρων τούτων προτάσεων δύναται νὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἓν ἀνεξάρτητον στοιχειῶδες θεώρημα.

Εἶναι δὲ πολλάκις δύσκολος ἡ ἀπόδειξις ἑνὸς θεωρήματος μὲ τὴν βοήθειαν μόνον στοιχειωδῶν προτάσεων. Οὕτω, ἡ ἀνωτέρω πρώτη ἀπόδειξις, στηριζομένη ἀποκλειστικῶς ἐπὶ τῶν γνωστοτέρων θεωρημάτων τῶν Στοιχείων, ἐμφανίζεται εἰς ἄκρον κοπιώδης· ἡ δευτέρα, διὰ τῆς χρήσεως τῶν διατεμνουσῶν, εἶναι καὶ αὐτὴ ἀρκετὰ μακρά, ἐνῷ ἡ τρίτη καὶ τετάρτη, βασιζόμεναι ἐπὶ τῆς ἐνελίξεως καὶ τῆς θεωρίας τῶν πόλων καὶ πολικῶν, εἶναι ἁπλούσταται.

2) Εἰς τὸ *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1907, σ. 3266, ὁ E.-B. Ecsott ζητεῖ τὸ *ἐναλλακτὸν* θεώρημα τοῦ ἀνωτέρω. Ὁ H. Brocard παραπέμπει σχετικῶς εἰς διάφορα συγγράμματα καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τὰς *Ἀσκήσεις Γεωμετρίας* σ. 523 - 525.

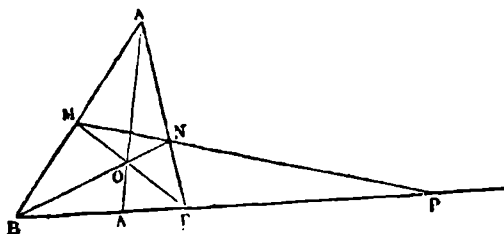
Βλ. ἐπίσης εἰς *Int. d. Math.* (1908), ἄρθρα τῶν Majol καὶ Lerch (σ. 20 - 22, n° 3266) καὶ Plancherel (σ. 140).

Θεώρημα τοῦ Céva 367

1240. **Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου μετὰ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου του, ὁρίζουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἓξ τμήματα. Τὸ γινόμενον τριῶν ἐξ αὐτῶν, μὴ ἐχόντων κοινὰ πέρατα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 167).

Ἄλλαι ἀποδείξεις. 1) Ἕνεκα τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΟΜΑΝ, τὰ



Σχ. 764.

σημεῖα Λ καὶ Ρ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Β καὶ Γ (Σχ. 764). Ἄρα

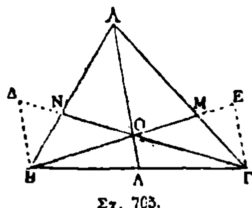
$$\frac{ΛΒ}{ΛΓ} = -\frac{ΡΒ}{ΡΓ}.$$

Αἱ σχέσεις ἄρα

$$\frac{NΓ}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PΓ} = 1 \text{ (τοῦ Μενελάου, ἐκ τῆς δ/σης PNM)}$$

καὶ

$$\frac{NΓ}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{ΛB}{ΛΓ} = -1 \text{ (ἡ τοῦ Céva),}$$



Σχ. 703.

εἶναι συνέπειαι ἡ μία τῆς ἄλλης.

2) Φέρομεν τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΛ· θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΛB}{ΛΓ} = \frac{BΔ}{EΓ}, \quad \frac{MΓ}{MA} = \frac{EΓ}{OA},$$

$$\frac{NA}{NB} = \frac{OA}{ΔB}.$$

Ἄρα

$$\frac{ΛB}{ΛΓ} \cdot \frac{MΓ}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1.$$

1240 α. Σημείωσις. 1) Ἡ 2α ἀπόδειξις εἶναι τοῦ Monsallut. (*J.d. M. E.* τοῦ *Vuibert*, 1 Ἰαν. 1901).

2) Δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν *céviennes* (69) τὰς εὐθείας διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου, ὁπότε τὸ θεώρημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: *Τρεῖς «céviennes» διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὁρίζουν* κλπ.

Ὁ ὅρος οὗτος προετάθη ὑπὸ τοῦ Poulain (*J.M.E.* 1888, σ. 278).

Ἀντίστροφον Θεώρημα 368

***1241.* Ἐὰν τρία σημεῖα, κείμενα ἀνὰ ἓν ἐφ' ἑκάστη πλευρᾶς τριγώνου, διαιροῦν τὰς πλευρὰς εἰς ἓξ τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τριῶν, μὴ διαδοχικῶν, ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ σημεῖα αὐτὰ μετὰ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Τοῦ ἀντιστρόφου τούτου θεωρήματος ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς (Νικ., Σ. Γ., § 41 (70)).

Θεώρημα 368—I

***1241 α.* Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι, διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀγόμεναι, διαιροῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων γωνιῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Τὸ θεώρημα δύναται νὰ γενικευθῇ· ἀρκεῖ *τὰ τμήματα νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν αὐτῶν συναρτήσεων τῶν προσκειμένων γωνιῶν*, ἢ καὶ πρὸς τρία τυχόντα μεγέθη, ἀντιστοιχοῦντος ἑκάστου πρὸς μίαν πλευράν. (Général de Coatpont· βλέπε *N. C. M.*, 1879, σ. σ. 384 καὶ 438).

---

69. Σημ. μετ. Προετάθη διὰ τὴν Ἑλληνικὴν ὁ ὅρος *γωνιώδης διατέμνουσα* ἀλλὰ μὲ μετρίαν ἐπιτυχίαν. Προτιμοτέρα εἶναι ἡ περίφρασις.

70. Σημ. μετ. Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο αἱ ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τοῦ Μενελάου καὶ Céva, ὡς καὶ τῶν ἀντιστρόφων των, γίνονται μετὰ πάσης αὐστηρότητος.

Παράδειγμα: Ἐὰν αἱ πλευραὶ διαιρεθοῦν εἰς μέρη ἀνάλογα τοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν τῶν προσκειμένων εἰς ἑκάστην πλευρὰν γωνιῶν, τὰ μήκη τῶν δύο τμημάτων τῆς πλευρᾶς α θὰ εἶναι α.Β° καὶ α.Γ°, τῆς β τὰ βΓ° καὶ βΑ° καὶ τῆς γ τὰ γΑ° καὶ γΒ°. Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{\alpha.B^0}{\alpha.\Gamma^0}\cdot\frac{\beta.\Gamma^0}{\beta.A^0}\cdot\frac{\gamma.A^0}{\gamma.B^0}=1,$$

ἕπεται ὅτι αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς μὲ τὰ σημεῖα διαιρέσεως εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1241 β. Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον ζήτημα εἶναι ἐκ τῶν σπανιωτάτων ἐκείνων παραδειγμάτων σχέσεως ἀμέσου μεταξὺ γωνιῶν καὶ μηκῶν καὶ πολὺ δικαιολογημένως ὁ εὑρέτης αὐτοῦ ἐφιστᾷ τὴν προσοχὴν ἐπὶ τοῦ ἰδιαιτέρου χαρακτῆρος του. (*N. C. M.*, 1879, σ. 438).

Θεώρημα 369

1242. 1) Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς αὐτό, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἑκάστης τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον περιφερειῶν.

1) Ἔχομεν

$$BE = B\Delta,$$
$$\Gamma Z = \Gamma E,$$
$$A\Delta = AZ,$$

ἄρα καὶ

$$BE.\Gamma Z.A\Delta = BE.\Gamma E.AZ,$$

Σχ. 706.

δηλ. (§ 1240) αἱ εὐθεῖαι ΑΕ κλπ. διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχουν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ΄, ΒΖ΄, ΓΔ΄, αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν γω[illegible] Α.

3) Ὁμοίως αἱ συνδέουσαι τὰς κ[illegible]ας μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν, διέρχονται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία τῶν προηγουμένων.

1242 α. Σημείωσις. 1) Τὸ σημεῖον Ο, τομὴ τῶν συνδεουσῶν τὰς κορυφὰς εὐθειῶν μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας, ὀνομάζεται *σημεῖον τοῦ Gergonne*· ἐπειδὴ ὁ μαθηματικὸς οὗτος προέτεινε τὸ ἀνωτέρω θεώρημα πρὸς λύσιν εἰς τὰ *Annales* αὐτοῦ.

2) Τὰ τρία σημεῖα ὡς τὸ Ο΄, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν αὐτὴν παρεγγεγραμμένην περιφέρειαν, εἶναι τὰ *ἐπισυνημμένα (adjoints) σημεῖα πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ* [illegible] ([illegible] 1887, σ. 59).

3) Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν, τῶν ἑνουσῶν ἑκάστην κορυ-

φὴν μετὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς γωνίαν, ὀνομάζεται *σημεῖον τοῦ Nagel*.

4) Τὰ σημεῖα τοῦ Gergonne καὶ τοῦ Nagel ἑνὸς τριγώνου εἶναι *ἀντίστροφα σημεῖα τοῦ Longchamps* (βλ. § 1242 δ).

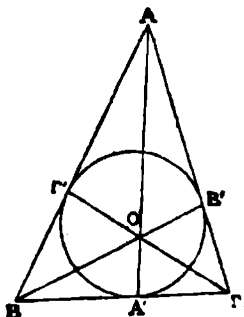
Διὰ τὸ *σημεῖον τοῦ Nagel*, βλ. *J. M. E.*, 1886, σ. 158, ἄρθρον τοῦ Vigarié καὶ *Mathesis*, 1887, σ. 57, ὡς καὶ 1906, σ. 93, n° 10. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται πολλάκις καὶ ὡς *ἰσοπεριμετρικὸν σημεῖον*.

5) Αἱ ἰδιότητες τοῦ *σημείου τοῦ Gergonne* ἐσημειώθησαν ὑπὸ τοῦ *Jean Céva (Aperçu historique* τοῦ *Chasles*, σημ. VII, σ. 296· κατὰ τὸ *I. d. Math.*, 1900, σ. 84, n° 1787).

6) Ὁ τόπος τῶν *σημείων τοῦ Gergonne* ὅταν ἡ βάσις μεταβάλλεται (καὶ ἡ γωνία Α ὡς καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρεια παραμένουν σταθεραί), εἶναι ἔλλειψις ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς τὰ Δ καὶ Ε (Σχ. 766). (*J. M. E.*, 1893, σ. 225· Boutin).

Θεώρημα 369—I

1242 β. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Α′, Β′, Γ′ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας, τέμνονται εἰς σημεῖον Ο (= τοῦ Gergonne) τοιοῦτον, ὥστε



Σχ. 757.

$$\frac{\mathrm{AO}\,.\,\mathrm{BO}\,.\,\Gamma\mathrm{O}}{\mathrm{A'O}\,.\,\mathrm{B'O}\,.\,\Gamma'\mathrm{O}}=\frac{4\,R}{\rho}.$$

(*Mathesis*, 1884, σ. 245, Thiry).

Ἐκ τῆς διατεμνούσης ΓΓ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΑ′ εὑρίσκομεν

$$\frac{\mathrm{A}\Gamma'}{\mathrm{B}\Gamma'}\cdot\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A'}\Gamma}\cdot\frac{\mathrm{A'O}}{\mathrm{AO}}=1,$$

ὅθεν

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{A'O}}=\frac{\mathrm{A}\Gamma'.\,\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma'.\,\Gamma\mathrm{A'}}=\frac{\alpha\,(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}.$$

Ὁμοίως,

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B'O}}=\frac{\beta\,(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)\,(\tau-\gamma)},\quad\frac{\Gamma\mathrm{O}}{\Gamma'\mathrm{O}}=\frac{\gamma\,(\tau-\gamma)}{(\tau-\beta)\,(\tau-\alpha)}.$$

Ἄρα:

$$\frac{\mathrm{AO}\,.\,\mathrm{BO}\,.\,\Gamma\mathrm{O}}{\mathrm{A'O}\,.\,\mathrm{B'O}\,:\,\Gamma'\mathrm{O}}=\frac{\alpha\beta\gamma\tau}{\tau\,.\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}=$$

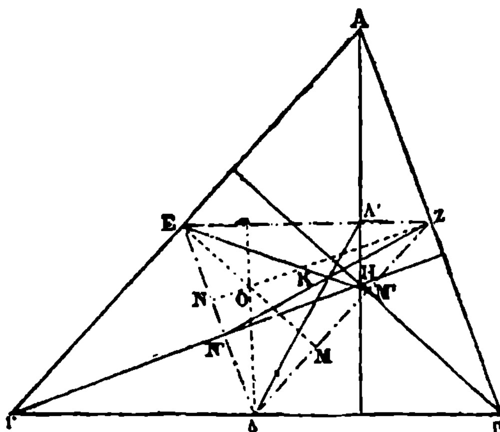
$$=\frac{4\,\mathrm{RE}\tau}{\mathrm{E}^2}=\frac{4\,\mathrm{R}\tau}{\mathrm{E}}=\frac{4\,\mathrm{R}\tau}{\tau\rho}=\frac{4\,\mathrm{R}}{\rho}.$$

Θεώρημα 369—II

1242 γ. **Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου μετὰ τῶν μέσων τῶν ἀντιστοίχων ἐπ' αὐτὰς ὑψῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ.**

Ἔστω ΔΕΖ τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ ΑΒΓ τρίγωνον (δηλ. τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του)· τὰ ὕψη αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΒΓ κύκλου καὶ πληροῦν, ἐπομένως, τὴν σχέσιν τοῦ Céva:

$$\frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΖ}} \cdot \frac{\text{ΛΖ}}{\text{ΛΕ}} \cdot \frac{\text{ΝΕ}}{\text{ΝΔ}} = 1.$$



Σχ. 768.

Ἀλλ' εἶναι ΛΕ = Λ'Ζ κλπ., ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων, ὡς τὰ ΔΕΖ καὶ ΑΕΖ· ἄρα:

$$\frac{\text{Μ'Δ}}{\text{Μ'Ζ}} \cdot \frac{\text{Λ'Ζ}}{\text{Λ'Ε}} \cdot \frac{\text{Ν'Ε}}{\text{Ν'Δ}} = 1,$$

καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΜ', ΔΛ', ΖΝ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1242 δ. Σημείωσις. 1) Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ γενικωτέρου ἐπὶ τῶν *ἰσοτομικῶν εὐθειῶν* (§ 2329), δηλ. τῶν εὐθειῶν, ὡς αἱ ΔΛ, ΔΛ', ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Δ ἀγομένων καὶ διερχομένων διὰ τῶν σημείων Λ, Λ', συμμετρικῶν πρὸς τὸ μέσον Ο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Ὥστε: *αἱ ἰσοτομικαὶ εὐθεῖαι τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva* ([71]) *εἶναι ἐπίσης εὐθεῖαι τοῦ Céva.*

Ἡ θεώρησις τῶν ἰσοτομικῶν εὐθειῶν ὀφείλεται εἰς τὸν G. de Longchamps n° 2330)· τὰ σημεῖα Ο (κέντρον περιγεγραμμένης περιφερείας) καὶ Κ καλοῦνται ἀντίστροφα σημεῖα.

Τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine τοῦ τριγώνου (§ 2352). Οὕτω, τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας

---

71. Σημ. μετ. Ἀντί: τριῶν εὐθειῶν διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (trois céviennes concourantes). Τὸν ὅρον τοῦτον ἀναγράφομεν μετὰ πάσης ἐπιφυλάξεως, ὅσον ἀφορᾷ τὸ εὔστοχον κλπ. αὐτοῦ, καὶ ἀποκλειστικῶς διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ βιβλίου τούτου.

εἰς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Κ τοῦ Lemoine αὐτοῦ εἶναι ἀντίστροφα σημεῖα, ἀναφορικῶς πρὸς τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ ΑΒΓ τρίγωνον ΔΕΖ.

Τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 1242 γ), ἀποδίδεται γενικῶς εἰς τὸν Lemoine (Ν. Α., 1884, σ. 27)... «Ἡ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς μετὰ τοῦ μέσου τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους, διέρχεται διὰ τοῦ *κέντρου* Κ *τῶν συμμετροδιαμέσων*. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον καὶ ἐχόντων τὰς βάσεις των ἐπὶ τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς». Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδημοσιεύθη τὸ 1873 ἢ 1874, ὡς ὑποδεικνύει ὁ M. d'Ocagne, καθὼς καὶ ὁ Vigarié, εἰς *J. M. E.*, 1886, σ. 180. *Note sur la symédiane*. Βλ. ἐπίσης A. F., 1874, Lille, σ. 1166, n° 2.

Ὁ Cesaro ἀποδίδει τήν, κατὰ τὰ προηγούμενα, κατασκευὴν τοῦ σημείου Κ εἰς τὸν Schlömilch (Ν. Α. 1887, σ. 223).

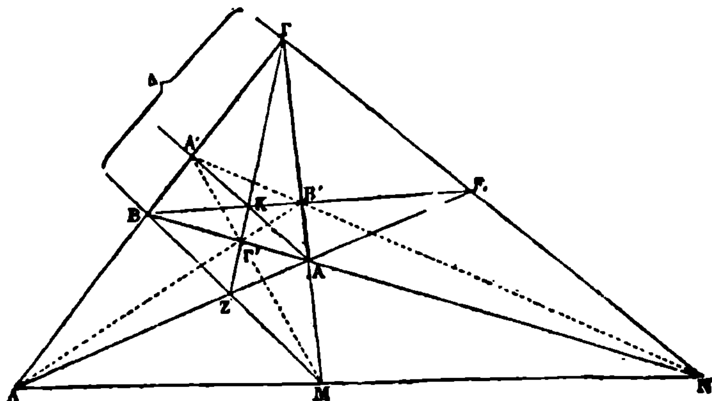
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος § 1242 γ, βλ. ἐπίσης *Mathesis*, 1881, σ. 185 καὶ *J. M. E.*, 1885, σ. 265, n° 27 καὶ *Σημείωσις* ἐπίσης, 1887, σ. 117, *Σημείωσις*.

2) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ γενικευθῇ, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν ὑψῶν ὑπὸ τριῶν τυχουσῶν εὐθειῶν τοῦ Céva (*Mathesis*, 1883, σ. σ. 103 καὶ 104 β· Kiehl).

Θεώρημα 369—III

1242 ε. **Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ Céva συναντοῦν τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ εἰς σημεῖα Α', Β', Γ', τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν εὐθειῶν (ΑΒ, Α'Β'), (ΒΓ, Β'Γ'), (ΓΑ, Γ'Α') κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**

Ἡ πρότασις εἶναι ἁπλῆ συνέπεια τῶν θεωρημάτων τῶν Μενελάου καὶ Céva (§§ 1227 καὶ 1240).



Σχ. 769.

Ἄς εἶναι Δ ἡ τομὴ τῶν ΜΒ καὶ ΑΑ', Ε τῶν ΛΑ καὶ ΒΒ', Ζ τῶν ΜΒ καὶ ΓΓ'. Τὰ τέσσαρα σημεῖα Λ, Ζ, Α, Ξ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς τετράδας Μ, Ζ, Β, Δ καὶ Ν, Ε, Γ, Δ.

ΛΜΝ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Κ τοῦ Céva πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ.

1242 ζ. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ θεώρημα τοῦτο διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: *Αἱ πλευραὶ τοῦ ποδικοῦ τριγώνου τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva συναντοῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου κατὰ τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα.*

2) *Ποδικὸν τρίγωνον* σημείου Κ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ', τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Θεώρημα 369—IV

1242 η. **Εἰς τρεῖς τυχούσας εὐθείας τοῦ Céva, ἀντιστοιχοῦν τρεῖς εὐθεῖαι διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ συναντῶσαι τὰς ἀπέναντι πλευρὰς κατὰ τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Αἱ ἓξ αὗται εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ τρεῖς κατὰ τέσσαρα σημεῖα. Εἶναι τὸ προηγούμενον θεώρημα διατυπωμένον κατὰ τὸν ἁρμόζοντα γενικώτερον τρόπον.

Εἰς πᾶσαν εὐθεῖαν ΓΓ' (Σχ. 769) ἀντιστοιχεῖ εὐθεῖα ΓΝ, διερχομένη διὰ τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ν τοῦ Γ' πρὸς τὰ Α καὶ Β· δηλ. διὰ τοῦ σημείου Ν τοῦ τοιούτου, ὥστε:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B}.$$

Πᾶν σημεῖον Κ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σημεῖον τομῆς τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva καὶ εἰς τοῦτο ἀντιστοιχοῦν τρία συσχετισμένα πρὸς αὐτὸ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ([72]). Ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva· ΑΕ, ΒΕ καὶ ΓΕ.

Παρατηρήσεις. Τὸ κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἔχει ὡς συσχετισμένα πρὸς αὐτὸ τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν. Τοῦ σημείου Κ τοῦ *Lemoine* συσχετισμένα εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ἐφαπτομενικοῦ τριγώνου (§ 2293), τοῦ δὲ κ. βάρους Θ τοῦ τριγώνου συσχετισμέναι εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ἀντισυμπληρωματικοῦ (§ 434β) αὐτοῦ τριγώνου.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἐπίσης τὰ συσχετισμένα σημεῖα πρὸς τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, κλπ.

Θεώρημα 369—V

1242 θ. **Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἀπειρί..ν τριγώνων ἐχόντων δοθὲν τρίγωνον ΔΖΕ ὡς ποδικὸν τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva.**

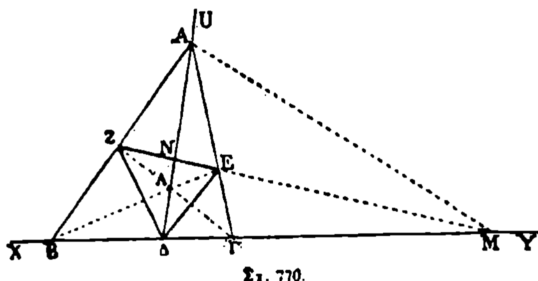
Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως τὴν διεύθυνσιν ΧΔΥ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου τριγώνου· ἀκολούθως ὁρίζομεν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν Ν τοῦ Μ, τομῆς τῶν ΧΥ καὶ ΔΕ, πρὸς τὰ Ζ καὶ Ε. Ὁρίζεται οὕτω ἡ διεύθυνσις ΔΝΖ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν τοῦ Céva, πᾶν δὲ σημεῖον Α ἐπ' αὐτῆς ὁρίζει ἓν ἐκ τῶν ζητουμένων τριγώνων. Ἐπειδὴ πᾶσα τέμνουσα ΜΓΔΒ τῆς ἁρμονικῆς τετράδος εὐθειῶν μὲ κορυφὴν τὸ Α διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπ' αὐτῆς καὶ αἱ

---

72. Σημ. μετ. Ὥστε αἱ τετράδες (Β, Κ, Β', Ε) κλπ. νὰ εἶναι ἁρμονικαί.

διαγώνιοι, έπομένως, ΒΕ, ΓΖ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΜΒΕ θὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς ΑΔ.

Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἐκ τῶν ζητουμένων.



Σχ. 770.

1242 ι. Παρατηρήσεις. 1) Δύναται νὰ δοθῇ καὶ μία κορυφή, ἡ Β λ.χ.
2) Ὅταν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ τὸ δοθὲν ποδικὸν ἔχουν σχέσιν τινὰ πρὸς ἄλληλα, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ εἶναι μοναδικὴ ἢ νὰ ὑπάρχουν ὡρισμένου πλήθους λύσεις.

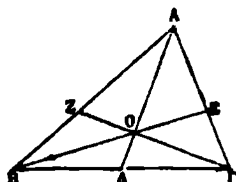
Οὕτω, εὐκόλως ὁρίζομεν τὸ μοναδικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ποδικὸν τρίγωνον συμπῖπτον πρὸς τὸ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ (συμπληρωματικὸν αὐτοῦ) ἢ πρὸς τὸ ὀρθικὸν αὐτοῦ. Τὰ πράγματα ὅμως εἶναι διάφορα ἐὰν τὸ ποδικὸν εἶναι τὸ τῶν διχοτόμων ἢ τῶν συμμετροδιαμέσων· ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα προβλήματα, τουλάχιστον μέχρι σήμερον ([78]), δὲν ἔχουν λάβει λύσεις διὰ μεθόδων ἀρκετὰ στοιχειωδῶν, ὥστε νὰ δικαιολογηθῇ ἡ παρουσία των εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον.

Σχετικῶς πρὸς τὸ θέμα αὐτὸ δύναταί τις νὰ συμβουλευθῇ τὸ *Int. des Mathématiciens* (1898, σ. 33, ζτμ. 268, Ricalde· 1899, σ. 54, n° 268, Bioche· σ. σ. 55 ἕως 58, Barbarin· 1903, σ. 64, n° 245, Brocard, Planhowo, Duran - Loriga).

Θεώρημα τοῦ Van Aubel 369—VI

1242 κ. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ Céva αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, τεμνόμεναι εἰς Ο. Δείξατε τὴν σχέσιν :

$$\frac{ΑΟ}{ΟΔ} = \frac{ΑΖ}{ΖΒ} + \frac{ΑΕ}{ΑΓ}.$$



Σχ. 771.

Τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ μήκη ΑΖ καὶ ΖΒ, τῶν δὲ τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ ὡς τὰ ΑΕ καὶ ΓΕ.

Ἄρα :

$$\frac{ΑΖ}{ΖΒ} + \frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{(ΑΟΒ)+(ΑΟΓ)}{(ΒΟΓ)}.$$

---

78. Σημ. μετ. Περὶ τὸ 1910.

Διὰ συγκρίσεως ἐπίσης τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΔ καὶ ΑΟΓ, ΟΔ, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{AO}{O\Delta}=\frac{(AOB)}{(BO\Delta)}=\frac{(AO\Gamma)}{(\Gamma O\Delta)}=\frac{(AOB)+(AO\Gamma)}{(BO\Delta)+(\Gamma O\Delta)}=\frac{(AOB)+(AO\Gamma)}{(BO\Gamma)}.$$

Ὥστε :

$$\frac{AZ}{ZB}+\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{AO}{O\Delta}.$$

Ἐφαρμογαί : 1) Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \text{ἄρα: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

2) Ἐὰν Ο τὸ κοινὸν τῶν διαμέσων :

$$\frac{AO}{O\Delta}=1+1=2.$$

3) Ἐὰν Ο τὸ ὀρθόκεντρον :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\varepsilon\varphi\, B}{\varepsilon\varphi\, A},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi\, A}\cdot \text{ὅθεν: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\, A}{\sigma\upsilon\nu\, B\ \sigma\upsilon\nu\, \Gamma}.$$

4) Ἐὰν Ο τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\beta^2}{\alpha^2},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot \text{ὅθεν: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}.$$

5) Ἐὰν Ο τὸ σημεῖον τοῦ Gergonne :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma}\cdot \text{ὅθεν: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

6) Ἐὰν Ο τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ Brocard :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\beta^2}{\gamma^2},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot \text{ὅθεν: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\alpha^2\beta^2+\gamma^2\beta^2}{\alpha^2\gamma^2}.$$

7) Ἐὰν Ο τὸ δεύτερον σημεῖον τοῦ Brocard :

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2},\quad \frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot \text{ὅθεν: } \frac{AO}{O\Delta}=\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}.$$

1242 λ. Σημείωσις. 1) Τὸ θεώρημα 1242 κ προετάθη εἰς τὴν *Mathesis*, n° 128 καὶ εἰς τὸ *Journal de Math.* τοῦ *Longchamps*, n° 237.

Ἡ ἀνωτέρω λύσις, ὡς καὶ αἱ συνέπειαι αὐτῆς, ἐδόθησαν ὑπὸ τοῦ Plakhowo εἰς τὸ *Bulletin des Sc. math. et ph.* τῶν Niewenglowski καὶ Gérard (1899 - 1900, σ. 289).

1242 μ. 2) Τὸ φαινομενικῶς στοιχειῶδες πρόβλημα, κατὰ τὸ ὁποῖον δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Δ

τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ἀχθοῦν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΗ, ΓΔΘ (Σχ. 772), νὰ εἶναι

$$ΔΕ = ΔΗ = ΔΘ,$$

ἐμελετήθη ὑπὸ τοῦ J.-W. Tesch. (*Int. d. M.*, 1900, σ. 17, n° 1044).

Διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σημείου αὐτοῦ, εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον, ἀπαιτεῖται ἡ λύσις μιᾶς ἐξισώσεως ἑβδόμου βαθμοῦ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ σημεῖον Δ ὁρίζεται δι' ἐξισώσεως τρίτου βαθμοῦ καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΒΗ. Ἡ κατασκευή του εἶναι ἀνέφικτος διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου καὶ εὐκολύνεται διὰ τῆς κατασκευῆς μιᾶς *στροφοειδοῦς*, ἐχούσης κορυφὴν τὸ Α καὶ διπλοῦν σημεῖον τὸ Η.

Σχ. 772.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν καὶ τὰς ἰδιότητας τῆς στροφοειδοῦς, βλέπε τὴν *'Αναλυτικὴν Γεωμετρίαν* τοῦ Briot.

3) Τὸ ζήτημα τοῦτο ἐτέθη τὸ 1898 ὑπὸ τοῦ Verkaart, ὑπενθύμησεν αὐτὸ ἐκ νέου ὁ Barisien τὸ 1910 καὶ ὁ G. Lemaire ἐπελήφθη αὐτοῦ ὀλίγον ἀργότερον (*I. d. M.*, 1910, σ. 264, ζτμ. 3744).

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ βάσιν β, ὕψος h καὶ μῆκος ΔΕ = ΔΗ = ΔΘ = k, ὁ Tafelmacher δίδει τὴν ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ

$$β^2 (h - k)^2 = 16\, hk^2,$$

ἥτις δὲν εἶναι ἀναγώγιμος παρὰ εἰς εἰδικὰς τινὰς περιπτώσεις, ὑποδειχθείσας ὑπὸ τοῦ Tesch.

4) Δύναται νὰ τεθῇ καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα· νὰ ὁρισθοῦν τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ Céva δοθέντος τριγώνου, τῶν ὁποίων τὰ μήκη (ἀπὸ τῶν κορυφῶν μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν) νὰ εἶναι τὰ αὐτά.

Ἐὰν τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶναι Ζ, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἑστία τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον κωνικῆς τομῆς καὶ ἐχούσης κέντρον τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου (L. Bickart, *J. M.*, 1910, σ. 170, n° 3724. Ἡ ἀπάντησις εὑρίσκεται εἰς τὰς σελ. 256 ἕως 260, εἰς ἄρθρα τῶν Welsch, Malo κλπ.).

Θεώρημα 369—VII

1242 ν. Ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΙΔ, ΙΕ, ΙΖ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΙΔ', ΙΕ', ΙΖ'. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Lemoine, Boutin, Retali, Kariya).

Διὰ τῶν Δ', Ε', Ζ' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὰ ὀρθογώνια τραπέζια Ζ'ΡΒΖ καὶ RΔ'ΔΒ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ΒΖ = ΒΔ, ΖΖ' = ΔΔ' καὶ αἱ γωνίαι ΔΒR καὶ ΖΒΡ ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα

$$\left.\begin{array}{ll} & Z'P = Δ'R, \\ \text{καὶ ἀναλόγως,} & ΣΔ' = TE', \quad E'U = Z'V \end{array}\right\} \quad (1)$$

Αἱ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ διερχόμεναι τρεῖς εὐθεῖαι ΓV, ΓΖ' καὶ ΓΡ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ VP, δίδουν τὴν σχέσιν :

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{AN}{BN}=\frac{VZ'}{PZ'}, \\ \text{Καθ' ὅμοιον τρόπον} & \frac{B\Lambda}{\Gamma\Lambda}=\frac{R\Delta'}{\Sigma\Delta'}, \\ & \frac{\Gamma M}{MA}=\frac{TE'}{UE'}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Σχ. 772 α

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (2) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰσότητας (1), εὑρίσκομεν

$$\frac{AN}{BN}\cdot\frac{B\Lambda}{\Gamma\Lambda}\cdot\frac{\Gamma M}{MA}=\frac{VZ'}{PZ'}\cdot\frac{R\Delta'}{\Sigma\Delta'}\cdot\frac{TE'}{UE'}=1,$$

δηλ. ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1242 ξ. Σημείωσις. 1) Ἡ ἀνωτέρω ἐκφώνησις τῆς προτάσεως εἶναι τοῦ Kariya (Τόκιο)· τὸ θεώρημα ὅμως δὲν εἶναι νέον ἀλλὰ τμῆμα ἑνὸς ἄλλου, τὸ ὁποῖον εἶχον ἤδη ἐξαγγείλει οἱ Lemoine καὶ Boutin δέκα πέντε ἔτη ἐνωρίτερον (1889—1890)

Τὸ θεώρημα τοῦ Kariya, ἐμφανισθὲν μεμονωμένον, προεκάλεσεν εὐθὺς ἀπὸ τῆς γνώσεώς του (1904) μέγα ἐνδιαφέρον καὶ ἐσχολιάσθη εὐρέως. Βλέπε σχετικῶς *Enseignement Mathématique*, 1904, σ. 131, 236, 406 καὶ 1905, σ. 44.

Μεταξὺ τῶν ἀποδείξεων, παρατηρήσεων καὶ ἐπεκτάσεων τῆς προτάσεως τοῦ Kariya, ἀναφέρομεν ἐκείνας τῶν Barbarin, Demoulin, Harold Hilton, Daniels, Franke, Faure καὶ ἰδιαιτέρως τοῦ Cantoni.

2) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Kariya εἶναι μακρὰ καὶ ὄχι πολὺ κομψή. (*Ens. mathém.*, τόμ. VI, 1904, σ. 131 ἢ *Revista de matematicas*, (Santiago), 1905, σ. 439. Ἡ ἀπόδειξις, ἀντιθέτως, τὴν ὁποίαν παρεθέσαμεν ἀνωτέρω εἶναι βραχεῖα καὶ ἁπλῆ.

Ἱστορικόν. Ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω καὶ ὅπως συχνὰ συμβαίνει κατὰ τὴν σπουδὴν τῆς *Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου*, τὸ θεώρημα τὸ

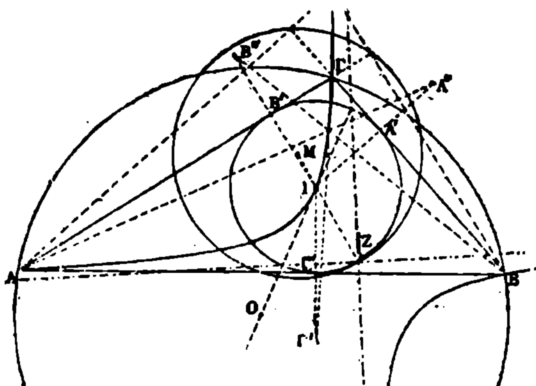
ὁποῖον ὁ Kariya ἐνόμισεν ὅτι πρῶτος ἀνεκάλυψε τὸ 1904 εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἑπομένου τοῦ Lemoine (1889):

Ἐὰν ἐκ σημείου M *τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου* ΑΒΓ *φέρωμεν καθέτους* MX, MY, MZ *ἐπὶ τὰς εὐθείας* ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ *καὶ λάβωμεν ἐπ' αὐτῶν μήκη* XA', YB', ZΓ' *ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν* MX, MY, MZ, *αἱ τρεῖς εὐθεῖαι* AA', BB', ΓΓ' *θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Λ.

Ὀλίγον ἀργότερον, ὁ Boutin εἰς μίαν ὡραιοτάτην σπουδήν: *Ἐπὶ μιᾶς ὁμάδος τεσσάρων κωνικῶν τομῶν τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου* ΑΒΓ, διετύπωσε τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: *Ἐὰν* A', B', Γ' *εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον* ΑΒΓ *καὶ ἐπὶ τῶν* IA', IB', IΓ' *λάβωμεν μήκη* IA'', IB'', IΓ'' *ἴσα πρὸς* λ *καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν πρὸς τὰ πρῶτα, αἱ εὐθεῖαι* AA'', BB'', ΓΓ'' *θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

Ὁ τόπος τοῦ σημείου τούτου ὅταν τὸ μῆκος λ μεταβάλλεται εἶναι κωνικὴ τομὴ (B), δηλ. ἡ ἰσοσκελὴς ὑπερβολή, ἡ προκύπτουσα διὰ ἰσογωνίου μετασχηματισμοῦ τῆς εὐθείας OI (σχ. 772 β). (*J. M. S.*, 1890, σ. 105, 124· ἐπίσης, σ. 265, *problème sur la triangle*).

Τὸ θεώρημα τοῦ Kariya διεξεδίκησεν ἐπίσης καὶ ὁ Retali (Μιλᾶνον), ὅστις τὸ ἐδημοσίευσεν τὸ 1896. Τέλος, εἰς τὴν *Mathesis*, 1903, σ. 265, ὁ Speckman (Arnhem, Ὀλλανδία) δίδει τὸ ἴδιον θεώρημα καὶ μὲ ἐκφώνησιν αὐτοῦ τὴν ἰδίαν πρὸς τὴν τοῦ Kariya.



Σχ. 772 β

3) *Ἡ ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ* (σχ. 772 β), ἰσογώνιος μετασχηματισμένη τῆς εὐθείας OI, ἀνήκει εἰς τὴν ὁμάδα τῶν τριῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς εὐθείας OI_a, OI_β, OI_γ. Αἱ τέσσαρες αὗται κωνικαὶ τομαί, αἱ τόσον πλήρως σπουδασθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Boutin, θὰ ἔπρεπεν δικαιωματικῶς νὰ ἔφερον τὸ ὄνομά του, ἢ τὸ τοῦ Lemoine. Ὠνομάσθη ἐν τούτοις ἡ πρώτη — ἡ σχετιζομένη πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου — *ὑπερβολὴ τοῦ Feuerbach* (μολονότι ὁ μαθηματικὸς οὗτος οὐδόλως ἐπελήφθη τῆς σπουδῆς αὐτῆς), ἐπειδὴ τὸ κέντρον της εἶναι τὸ *σημεῖον τοῦ Feuerbach* (§ 1341 β), δηλ. τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ περιφέ-

ρεια τῶν *ἐννέα σημείων* ἐφάπτεται τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας. (*A. F.* 1889, σ. 203, Lemoine, *J. M. S.*, 1890. σ. 105, Boutin).

4) Ἡ *ὑπερβολὴ τοῦ Feuerbach* λαμβάνεται ἐπίσης καὶ ὡς ἀκολούθως: *Ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων* ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' *τριγώνου* ΑΒΓ, *λαμβάνομεν τρία ἴσα μήκη*

$$A'P_\alpha = B'P_\beta = \Gamma'P_\gamma = \lambda.$$

καὶ κατὰ φορὰς πάσας πρὸς τὸ Ο *ἢ πάσας ἀντιθέτους τῆς φορᾶς ταύτης. Αἱ ἐκ τῶν* Α, Β, Γ *κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς* P_α, P_β, P_γ *τέμνονται εἰς σημεῖον* Ρ *καὶ τοῦ ὁποίου ὁ τόπος, διὰ* λ *μεταβλητόν, εἶναι ἡ ὑπερβολὴ τοῦ Feuerbach.*

Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι $A'P_\alpha$, $B'P_\beta$, $\Gamma'P_\gamma$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. (*Mathesis*, 1893, σ. 80, Neuberg καὶ Mandart).

5) *Σημεῖον τοῦ Kariya.* Θὰ ἐξακολουθήσωμεν νὰ λέγωμεν *σημεῖον τοῦ Kariya*, ἐπειδὴ ὁ ἀξιότιμος Ἰάπων συγγραφεὺς ἐξεδήλωσεν τὴν ἐπιθυμίαν ταύτην καὶ πρὸς τὴν ὁποίαν ἄλλωστε οἱ Lemoine καὶ Boutin δὲν ἀντετέθησαν. Ἐκτὸς τούτου ὁ κύριος δημιουργὸς τῆς *Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου* (ὁ Lemoine) εἶναι πλουσιώτατος εἰς θεωρήματα καὶ πλεῖστα ὅσα, ἀξιοσημείωτα διὰ τὰς ἰδιότητάς των εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, σημεῖα φέρουν τὸ ὄνομά του· περὶ τούτου πείθεταί τις ἀναγινώσκων τὴν ἤδη ἀναφερθεῖσαν μελέτην: *A. F.*, 1889, Paris, σ. 197 ἕως 222.

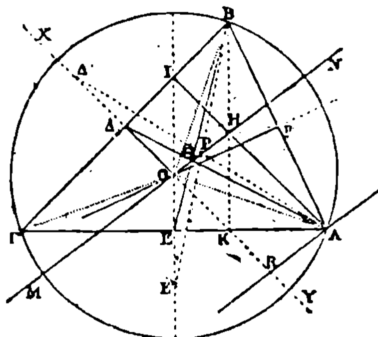
Ὅσον διὰ τὸν Boutin, τὰ πολυάριθμα καὶ σοφὰ ἄρθρα του εἰς τὸ *J. M. S.* τοῦ ἐξασφαλίζουν θέσιν λίαν τιμητικὴν μεταξὺ τῶν συγχρόνων (74) γεωμετρῶν.

Θεώρημα 369—VIII

1242 ο. Ἔστωσαν ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν λάβωμεν σημεῖα Δ', Ε', Ζ' ἀντιστοίχως καὶ τοιαῦτα, ὥστε

$$\frac{O\Delta'}{O\Delta} = \frac{OE'}{OE} = \frac{OZ'}{OZ}$$

αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Euler ΟΘΗ τοῦ τριγώνου. (Boutin, ὕστερον Franke).



Σχ. 773

Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὰς μεσοκαθέτους ΟΔ, ΟΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΓΖ καὶ νὰ φέρωμεν τὰς ΑΔ καὶ ΒΕ.

Αἱ ἀκτῖνες ΑΟ, ΒΟ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ό, αἱ διάμεσοι ΑΔ, ΒΕ εἰς τὸ Θ, τὰ ὕψη εἰς Η καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ' εἰς Ρ. Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Euler ΟΘΗ.

74. Σημ. μετ.: Περὶ τὸ 1910.

Τὰ ὕψη ΑΙ, ΒΚ εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς ΟΔ, ΟΕ· δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ἑπομένως ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν δεσμῶν μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς Α καὶ Β, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τῶν ΟΔ καὶ ΟΕ. Αἱ δέσμαι αὗται ὁρίζονται ὡς αἱ προβάλλουσαι τὰς ὁμοίας σημειοσειρὰς Ο, Δ, Δ'... καὶ Ο, Ε, Ε'... (καὶ εἶναι ἑπομένως *προβολικαί*) καὶ ἐπειδὴ τρία ζεύγη ἀκτίνων αὐτῶν, τὰ (ΑΟ, ΒΟ), (ΑΔ, ΒΕ), (ΑΙ, ΒΚ), τέμνονται κατὰ τὰ τρία σημεῖα Ο, Θ, Η κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἕπεται ὅτι καὶ πᾶν ἄλλο ζεῦγος ὁμολόγων ἀκτίνων, ὡς τὸ ΑΔ', ΒΕ', θὰ τέμνεται ἐπίσης ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Τὸ σημεῖον τοῦτο Ρ θὰ ἐξακολουθοῦμεν νὰ ὀνομάζωμεν *σημεῖον τοῦ Franke* (§ 1242 π, 1)).

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ' εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Δ, τὸ σημεῖον Ρ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Θ· ἐὰν τὸ Δ' εὑρίσκεται πέραν τοῦ Δ, τὸ Ρ κεῖται μεταξὺ Θ καὶ Η.

Διὰ Δ' εἰς τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς διευθύνσεως ΟΧ, τὸ Ρ συμπίπτει πρὸ τὸ Η.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΑR παράλληλον πρὸς τὴν ΟΗ. Ἐὰν τὸ Δ' εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Ο καὶ R, τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΜ· διὰ Δ'≡R, τὸ *σημεῖον τοῦ Franke* ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας τοῦ Euler. Διὰ Δ' πέραν τοῦ R, λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΗ.

Διὰ Δ' τέλος ἀπομακρυνόμενον εἰς ἄπειρον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως RΥ, τὸ σημεῖον Ρ πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τὸ Η.

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀπέρατος εὐθεῖα ΜΟΗΝ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων Ρ.

2) Τὰ σημεῖα Δ' καὶ Ρ εἶναι ἀντίστοιχα ἀλλήλων κατὰ ἕνα ἀρκετὰ ἀξιοσημείωτον μετασχηματισμόν:

Διὰ Δ' κινούμενον ἐπὶ τῆς ΧΟΥ καὶ ἀπὸ τοῦ Χ εἰς ἄπειρον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, τὸ σημεῖον Ρ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ Η κινούμενον πρὸς τὸ Μ, ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ, ἐπιστρέφει εἰς Ν καὶ πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τὸ Η πάλιν ὅταν τὸ σημεῖον Δ' ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΟRΥ.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν κίνησιν τοῦ Δ' ἐπὶ τῆς ΧΥ, ὅταν τὸ Ρ διαγράφῃ τὴν εὐθεῖαν ΜΟΝ. Εἰς πᾶσαν δὲ θέσιν τοῦ σημείου Ρ, ἀντιστοιχοῦν τελείως ὡρισμέναι θέσεις τῶν σημείων Δ', Ε', Ζ' καὶ αἱ σημειοσειραὶ Ο, Δ..., Ο, Ε..., Ο, Ζ... εἶναι μεταξύ των ὅμοιαι.

3) Ὡς ἀπεδείξαμεν, ἡ *εὐθεῖα τοῦ Euler* εἶναι ὁ τόπος τῶν *σημείων τοῦ Franke* τοῦ δοθέντος τριγώνου. Οὐδεμία δὲ ἀντίφασις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῆς τερματιζούσης τὴν παράγραφον 293 παρατηρήσεως, διὰ τὰ *ἀνάλογα* σημεῖα ἑνὸς δοθέντος σχήματος. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι τὰ σημεῖα Ο, Θ, Η, τῶν ὁποίων αἱ ἰδιότητες εἶναι τόσον διακεκριμέναι ἀπ' ἀλλήλων, ἀπολαμβάνουν κοινῶν ἄλλων ἰδιοτήτων καὶ αἵτινες ἐπιτρέπουν τὴν ἐνσωμάτωσίν των εἰς τά, ἀπεριορίστου πλήθους, *σημεῖα τοῦ Franke*.

4) *Ἡ εὐθεῖα τοῦ Euler* ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐπίσης τόπος ὡρισμένων ἄλλων σημείων τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Λ. χ. τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἐφαπτομενικὸν τρίγωνον τοῦ δοθέντος ΑΒΓ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης. Βλ.: *Notes de Géométrie récente* τοῦ A. Gob. (Συμπλήρωμα εἰς τὸν τόμον IX τοῦ ἔτους 1889 τῆς *Mathesis*).

1242 π. Σημείωσις. 1) Ἡ προηγουμένη πρότασις, εἶναι τοῦ A. Boutin καὶ εὑρίσκεται εἰς τὸ *J. M. S.* τοῦ 1890, σ. 266. Τὸ ὡραῖον τοῦτο θεώρημα, διατυπωμένον εἰς ὀλίγας γραμμάς, διῆλθεν τότε ἀπαρατήρητον καὶ ἐξετιμήθη δεόντως δέκα τέσσαρα ἔτη ἀργότερον, ὅταν ὁ Franke (Βερολῖνον) τὸ ὑπέδειξε εἰς τὸ *Enseignement mathématique* τὸ 1904 (σ. 407, V).

2) *Ἐὰν ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων* ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ *τριγώνου* ΑΒΓ *λάβωμεν μήκη* ΟΔ′, ΟΕ′, ΟΖ′, *ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν μηκῶν τῶν καθέτων τούτων, δηλ. τοιαῦτα, ὥστε*

$$ΟΔ \,.\, ΟΔ' = ΟΕ \,.\, ΟΕ' = ΟΖ \,.\, ΟΖ' = Κ^2,$$

αἱ εὐθεῖαι ΑΔ′, ΒΕ′, ΓΖ′ *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Π. *Ὁ τόπος τοῦ σημείου τούτου, ὅταν ἡ δύναμις* $Κ^2$ *μεταβάλλεται, εἶναι μία ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Δ′Ε′Ζ′ εἶναι *ὁμολογικὰ* καὶ τὸ σημεῖον Π εἶναι τὸ *κέντρον τῆς ὁμολογίας*. (*A. F.*, 1889, σ. 202 καὶ 203· E. Lemoine). Εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς προτάσεως ταύτης, ὁ Lemoine θεωρεῖ τὸ σημεῖον Ο τυχόν, ἐνῷ ἡμεῖς περιωρίσθημεν ἀνωτέρω εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν σχετιζομένην πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Euler— διὰ νὰ λάβωμεν οὕτω ἓν ἀνάλογον πρὸς τὸ τοῦ Boutin θεώρημα.

Ἡ ὑπερβολὴ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ Lemoine K ἡ ἰδιότης αὕτη ἀρκεῖ διὰ τὴν ταύτισιν τῆς καμπύλης ταύτης πρὸς τὴν *ὑπερβολὴν τοῦ Jerabeck*.

3) Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα εἰς ἰσογώνιον ἀντιστροφὴν πάσης εὐθείας (ε) τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου (ἀναφορᾶς) ΑΒΓ εἶναι κωνικὴ τομὴ (Κ) περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα δὲν τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν (Ο), ἡ καμπύλη (Κ) εἶναι ἔλλειψις, παραβολὴ ἐὰν ἐφάπτεται τῆς (Ο) καὶ ὑπερβολὴ ἐὰν τέμνῃ αὐτήν.

Ἡ ὑπερβολὴ εἶναι ἰσόπλευρος ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ε) διέρχεται διὰ τοῦ Ο· ἐπειδὴ τότε ἡ ὑπερβολὴ αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η, ἀντιστρόφου τοῦ Ο. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα τῶν *Brianchon καὶ Poncelet* (§ 2183, β), ἡ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη ἰσόπλευρος ὑπερβολὴ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου αὐτοῦ.

4) Ἡ κατὰ τὴν ἰδίαν ἀντιστροφήν, ἀντίστροφος τῆς *εὐθείας τοῦ Euler* ΟΘΗ εἶναι ἡ *ὑπερβολὴ τοῦ Jerabeck* (*Mathesis*, 1888, σ. 81, J. Neuberg καὶ *J. M. S.*, 1890, σ. 266, A. Boutin).

Ἡ ὑπερβολὴ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ Lemoine K, ἀντιστρόφου τοῦ κ. βάρους Θ.

Ἡ ἀντίστροφος τῆς εὐθείας ΟΚ ὑπερβολὴ ὠνομάσθη *ὑπερβολὴ τοῦ Kiepert*. (Βλ. ἐπ. § 1773 ο), ἡ δὲ ἀντίστροφος τῆς ΟΙ, *ὑπερβολὴ τοῦ Feuerbach*. (Διὰ τὰς διαφόρους ταύτας ὑπερβολὰς βλέπε: *A.F.*, 1809, σ. 203. E. Lemoine. — *J. M. S.*, 1890, σ. 105, 124, Boutin. — *Mathesis*, 1887, σ. 208, M'Say, 1891, σ. 191, 192, 1892, σ. 241, Neuberg, 1893, σ. 81, Neuberg καὶ Mandart, 1893, σ. 265, Speckman, 1905, σ. 118, Neuberg. — *N. A.* 1887, σ. 231, n° 15, E. Cesaro. Βλ. ἐπίσης διάφορα σχετικὰ ἄρθρα εἰς *J. M. S.*, 1884, 1885, 1886, 1889, 1890.

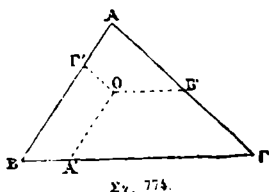
5) Αἱ ἀντίστροφοι τῶν εὐθειῶν τῶν ἑνουσῶν τὸ σημεῖον Ο πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ Nagel ἢ τοῦ Brocard ἢ τοῦ Gergonne εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευραι ὑπερβολαὶ περιγεγραμμέναι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἰσοπλεύρων ὑπερβολῶν, τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον, εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων αὐτοῦ (§ 2183, γ). (*N. A.*, 1863. σ. 475 καὶ 476, Mathieu καὶ *Mathesis*, 1891, σ. 192).

6) Αἱ ἀσύμπτωτοι μιᾶς ἰσοσκελοῦς καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ὑπερβολῆς, εἶναι αἱ δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι τοῦ Simson (§ 765, α), αἱ ἀντίστοιχοι τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας ΑΒΓ, καθ' ἣν (διάμετρον) τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ εὐθεῖα (ε) καὶ τῆς ὁποίας ἀντίστροφος εἶναι ἡ ἐν λόγῳ ὑπερβολή.

Διὰ τὴν *ὑπερβολὴν* λ.χ. *τοῦ Kiepert*, ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι ἡ ΟΚ, δι' ἐκείνην τοῦ Jerabeck ἡ ΟΗ καὶ διὰ τὴν τοῦ Feuerbach ἡ εὐθεῖα ΟΙ. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν, αἱ *εὐθεῖαι τοῦ Simson* διέρχονται διὰ τοῦ *σημείου τοῦ Feuerbach*, ἀφοῦ τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ κέντρον τῆς καμπύλης. (*Mathesis*, 1893, σ. 86).

Θεώρημα 369—IX



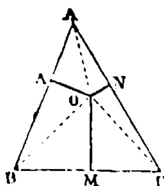
Σχ. 774.

1242 ρ. Ἐκ τυχόντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου (Σχ. 774). Δείξατε τὴν σχέσιν

$$\frac{BA'}{B\Gamma}+\frac{\Gamma B'}{\Gamma A}+\frac{A\Gamma'}{AB}=1.$$

Θεώρημα 370

1243. Αἱ ἐκ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ὁρίζουν ἓξ τμήματα. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν μὴ διαδοχικῶν ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἄλλων.



Σχ. 775.

Ἔστωσαν ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ αἱ κάθετοι αὗται. Κατὰ γνωστὸν θεώρημα (§ 1162), θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$A\Lambda^2 - B\Lambda^2 = AO^2 - BO^2,$$
$$BM^2 - \Gamma M^2 = BO^2 - \Gamma O^2,$$
$$\Gamma N^2 - AN^2 = \Gamma O^2 - AO^2.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$A\Lambda^2 + BM^2 + \Gamma N^2 = B\Lambda^2 + \Gamma M^2 + AN^2. \qquad (1)$$

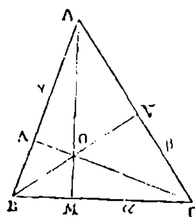
Θεώρημα 371

1244. Ἐὰν τρία σημεῖα κείμενα ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ὁρίζουν ἓξ τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν μὴ διαδοχικῶν ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων, τὰ σημεῖα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς προβολαὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου τούτου θεωρήματος γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

1245. Ἐφαρμογή. *Αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ.*

1) Ἡ σχέσις $ΑΛ^2 + ΒΜ^2 + ΓΝ^2 = ΒΛ^2 + ΓΜ^2 + ΑΝ^2$ πληροῦται προφανῶς ὑπὸ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἀφοῦ εἶναι ΑΛ=ΒΛ, ΒΜ=ΓΜ, ΓΝ=ΑΝ.



Σχ. 776.

2) Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου· θὰ ἔχωμεν (§ 1162):

$$ΑΛ^2 - ΒΛ^2 = ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = β^2 - α^2,$$

$$ΒΜ^2 - ΓΜ^2 = γ^2 - β^2,$$

$$ΓΝ^2 - ΑΝ^2 = α^2 - γ^2,$$

καὶ

$$ΑΛ^2 + ΒΜ^2 + ΓΝ^2 = ΒΛ^2 + ΓΜ^2 + ΑΝ^2.$$

Θεώρημα 371—I

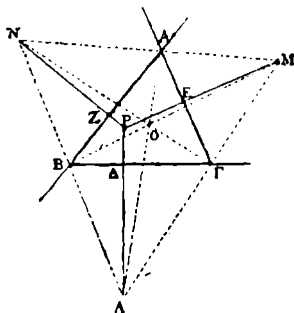
1246. **Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ καὶ τῶν πλευρῶν Β Γ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

1η Ἀπόδειξις. (§ 757).

2α Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Λ, Μ, Ν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων· θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ κάθετοι ΛΔ, ΜΕ, ΝΖ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$ΒΔ^2 + ΓΕ^2 + ΑΖ^2 = ΔΓ^2 + ΕΑ^2 + ΒΖ^2.$$

Ἀλλ' αὐτὴ εἶναι φανερά, ἀφοῦ τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, πρὸς τὰ τμήματα, τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο.



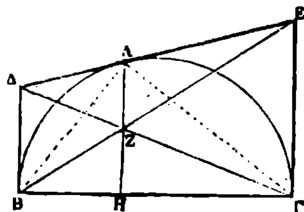
Σχ. 777.

3η Ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι ἰσοτομικὰ τῶν τριῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας· καὶ ἐπειδὴ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς εἰς τὰ τρία τελευταῖα σημεῖα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ κάθετοι εἰς τὰ τρία σημεῖα θὰ διέρχωνται ἐπίσης δι' ἑνὸς σημείου Φ. Τὸ θεώρημα τοῦτο (§ 1246), δύναται νὰ θεωρηθῇ εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς προηγουμένου (§ 752). Τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ο εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον.

Θεώρημα 371— II

1246 α. **Ἔστω ΒΓΕΔ τραπέζιον ὀρθογώνιον περιγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ἔχον διάμετρον τὴν κάθετον πλευρὰν ἐπὶ τὰς βάσεις.**

Δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις.



Σχ. 778.

Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΒΕ καὶ ΑΗ (καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ)· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΖΗ.
Ἐκ τῶν παραλλήλων ἔχομεν:

$$\frac{ZH}{\Gamma E} = \frac{BH}{B\Gamma} = \frac{\Delta A}{\Delta E},$$

ὅθεν $$ZH = \frac{\Delta A \, . \, \Gamma E}{\Delta E},$$

$$\frac{AZ}{B\Delta} = \frac{AE}{\Delta E} \quad \text{καὶ} \quad AZ = \frac{B\Delta \, . \, AE}{\Delta E} = \frac{\Delta A \, . \, \Gamma E}{\Delta E}.$$

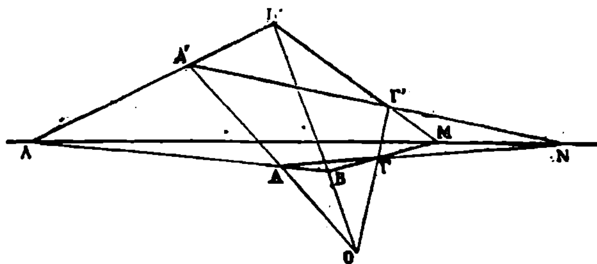
Ἄρα: $ZH = AZ.$

Παρατηρήσεις. 1) Αἱ διαγώνιοι καὶ τὸ ὕψος ΑΗ εἶναι αἱ συμμετροδιάμεσοι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας ὅτι αἱ ἐκ τῶν Β καὶ Γ συμμετροδιάμεσοι αὐτοῦ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

2) Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΗ καὶ νὰ βασισθῶμεν ὕστερον ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τῆς § 1109. Ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις τοῦ πρώτου μέρους θὰ ἦτο ἐξίσου μακρὰ ὅσον καὶ ἡ δοθεῖσα.

Θεώρημα τοῦ Desargues—372

1247. Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων τέμνωνται ἀνὰ δύο κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἀνὰ δύο τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 779

Ἔστωσαν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' τὰ τρίγωνα, τοιαῦτα, ὥστε τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας· πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

1) Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν διὰ τῶν διατεμνουσῶν καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Céva.

2) Διὰ τῆς χρήσεως τοῦ ἀναρμονικοῦ λόγου (G., n° 782).

3) Διὰ τῆς χρήσεως βοηθητικοῦ στερεοῦ (*Μέθοδοι*, § 177).

Ἀντίστροφον θεώρημα 373

1248. Ἐὰν αἱ κορυφαὶ δύο τριγώνων κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

1249. ***Σημείωμα ἐπὶ τῆς ὁμολογίας.*** Ἡ *ὁμολογία* ὀφείλεται εἰς τὸν ἐπιφανῆ μαθηματικὸν Poncelet. Τὸ *θεώρημα τοῦ Desargues* καὶ τὸ *ἀντίστροφον* αὐτοῦ (§§ 1247, 1248), εἶναι αἱ βάσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐθεμελιώθησαν αἱ κατασκευαὶ καὶ αἱ ἀνακαλύψεις αἱ σχετιζόμεναι πρὸς τὴν μέθοδον αὐτήν.

Ἔστω (Α) ἐπίπεδον σχῆμα καὶ (Α') ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἀπό τινος σημείου Ο ἐπὶ ἐπίπεδον (Π). Ἐὰν κατακλίνωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος (Α) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἡ νέα θέσις τοῦ σχήματος (Α) καὶ τὸ (Α') ὁρίζουν δύο *σχήματα ὁμολογικὰ* [75], δηλ. δύο σχήματα τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἀντιστοιχίζονται ἀνὰ δύο, ὡς εὑρισκόμενα ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καλουμένου *κέντρου τῆς ὁμολογίας*.

Ἐὰν (Α) καὶ (Β) εἶναι δύο ὁμοιόθετα σχήματα καὶ (Α'), (Β') αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἀπό τινος σημείου Ο ἐπί τινος ἐπιπέδου, τὰ σχήματα (Α'), (Β') εἶναι ὁμολογικά.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τυχόντα σημεῖα τοῦ ἑνὸς ἐκ δύο ὁμολογικῶν σχημάτων πρὸς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ ἄλλου τέμνονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καλουμένης *ἄξονος τῆς ὁμολογίας*.

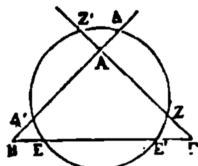
Διὰ νὰ καταστῇ τις ἐνήμερος τοῦ θαυμασίου τούτου ὀργάνου σπουδῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων καὶ τὸ ὁποῖον ὁ Poncelet ἐδημιούργησεν, ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσῃ τὸ ἔργον αὐτοῦ: *Traité des Propriétés projectives des figures.*

Αἱ πρῶται ἔρευναι τοῦ Poncelet ἐπὶ τῆς ὁμολογίας ἀνεκοινώθησαν ὑπ' αὐτοῦ τὸ 1814 εἰς τοὺς Français καὶ Servois. (*Traité des prop. proj. des figures*, 2α ἔκδοσις, πρόλογος, σ. VI).

Θεώρημα τοῦ Carnot 374

1250. Μία περιφέρεια τέμνει τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὰ σημεῖα (Δ, Δ'), (Ε, Ε'), (Ζ, Ζ') τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε τὴν σχέσιν -

$$\frac{\text{ΑΔ}\,.\,\text{ΒΕ}\,.\,\text{ΓΖ}}{\text{ΒΔ}\,.\,\text{ΓΕ}\,.\,\text{ΑΖ}} \times \frac{\text{ΑΔ}'\,.\,\text{ΒΕ}'\,.\,\text{ΓΖ}'}{\text{ΒΔ}'\,.\,\text{ΓΕ}'\,.\,\text{ΑΖ}'} = 1.$$



Σχ. 780.

Πράγματι,

$$\text{ΑΔ}\,.\,\text{ΑΔ}' = \text{ΑΖ}\,.\,\text{ΑΖ}'.$$

$$\text{ΒΕ}\,.\,\text{ΒΕ}' = \text{ΒΔ}\,.\,\text{ΒΔ}'$$

$$\text{ΓΖ}\,.\,\text{ΓΖ}' = \text{ΓΕ}\,.\,\text{ΓΕ}'.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν δεικτέαν σχέσιν.

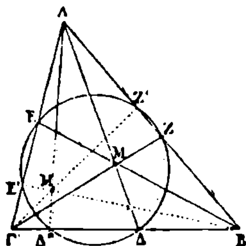
Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦ Carnot, ὡς καὶ τὰ τῶν Πάππου (§ 1214) καὶ Desargues (§ 1219), ἔχουν τὰ ἀνάλογά των, ὅταν ἡ περιφέρεια ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τυχούσης κωνικῆς τομῆς.

---

75. Σημ. μετ. Διατηροῦμεν τοὺς ὅρους τοῦ Βιβλίου.

Θεώρημα τοῦ Terquem 374—I

1251. Ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ μετὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ, ἡ περιφέρεια, ἡ διερχομένη διὰ τῶν τομῶν Δ, Ε, Ζ τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τέμνει τὰς πλευρὰς ἐκ νέου εἰς σημεῖα Δ', Ε', Ζ' τοιαῦτα, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ' (N. A. 1842, σ. 403).



Σχ. 781.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Céva (§ 1240), ἔχομεν :

$$ΒΔ \,.\, ΑΖ \,.\, ΓΕ = ΓΔ \,.\, ΒΖ \,.\, ΑΕ. \quad (1)$$

Καὶ ἐπειδὴ

$$ΒΔ' \,.\, ΒΔ = ΒΖ' \,.\, ΒΖ,$$
$$ΑΖ' \,.\, ΑΖ = ΑΕ' \,.\, ΑΕ,$$
$$ΓΕ' \,.\, ΓΕ = ΓΔ' \,.\, ΓΔ,$$

διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$ΒΔ' \,.\, ΑΖ' \,.\, ΓΕ' \times ΒΔ \,.\, ΑΖ \,.\, ΓΕ = ΒΖ' \,.\, ΑΕ' \,.\, ΓΔ' \times ΒΖ \,.\, ΑΕ \,.\, ΓΔ,$$

ἤ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1),

$$ΒΔ' \,.\, ΑΖ' \,.\, ΓΕ' = ΒΖ' \,.\, ΑΕ' \,.\, ΓΔ',$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1251 α. Σημείωσις. 1) Τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ, Μ' ὠνομάσθησαν *σημεῖα τοῦ Terquem* ὑπὸ τοῦ Candido (N.A. 1900, σ. 251). Τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ κέντρον βάρους Θ εἶναι σημεῖα τοῦ Terquem.

Τὸ σημεῖον τοῦ Gergonne καὶ ἕκαστον τῶν συνημμένων πρὸς αὐτὸ σημείων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο σημεῖα ἀντίστοιχα τοῦ Terquem συμπεσόντα εἰς ἕν.

2) Ὁ Lemoine τὸ 1884 προέτεινε τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα: Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ὡς καὶ δύο σημεῖα Δ, Δ' ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν του· νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν σημείων αὐτῶν καὶ τέμνουσα τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς εἰς σημεῖα Ζ καὶ Ε ἀντιστοίχως, εἰς τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (*J. M. E.*, 1885, σ. 262).

Θεώρημα τοῦ M'Kensie 374—II

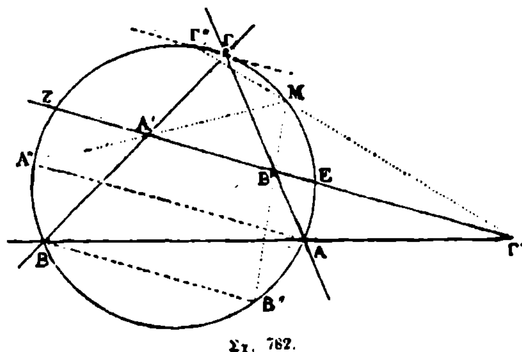
1251 β. Ἔστω Α'Β'Γ' τυχοῦσα διατέμνουσα τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α'', Β'', Γ'' τὰ σημεῖα καθ' ἃ συναντοῦν τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρειαν αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ παράλληλοι πρὸς τὴν διατέμνουσαν.

Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α'Α'', Β'Β'', Γ'Γ'' τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Μ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. (*J. M. S.*, 1887, σ. 201).

Εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἐπιπροσθέτως ὅτι: τὸ τρίγωνον Α''Β''Γ'' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, αἱ

ἴσαι πλευραὶ ΑΒ, Α''Β'' κλπ. τέμνονται κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν διατέμνουσαν, ἡ διατέμνουσα τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ'' κατὰ τρία σημεῖα, ἅτινα ἑνούμενα μὲ τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς δίδουν τρεῖς εὐθείας τεμνομένας εἰς σημεῖον Μ'' τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τὰ δὲ σημεῖα Μ καὶ Μ'' ἴσον ἀπέχουν τῆς διατεμνούσης.

Φέρομεν τὰς Α'Α'' καὶ Β'Β'' τεμνομένας εἰς Μ· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, δηλ. νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι Μ καὶ Γ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α''Β'' εἶναι βεβαίως ἴσαι.



Σχ. 762.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α + Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α'' + Β''· πράγματι,

$$2\,(A + B) = \overset{\frown}{BA''} + \overset{\frown}{A''\Gamma} + \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{\Gamma M}$$

$$2\,(A'' + B'') = \overset{\frown}{B''A} + \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{A''\Gamma} + \overset{\frown}{M\Gamma},$$

καὶ $\overset{\frown}{A''B} = \overset{\frown}{B''A}, \quad \overset{\frown}{A''\Gamma} = \overset{\frown}{A\Gamma''}.$

Ἄρα: $A + B = A'' + B''$

ἢ γων. $M = \Gamma$.

Ἡ τρίτη εὐθεῖα Γ'Γ'' διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ Μ.

Θεώρημα τοῦ Aubert 374—III

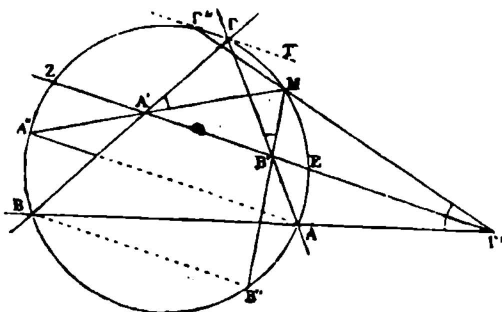
1251 γ. Διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τρεῖς εὐθείας ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'', παραλλήλους μεταξύ των καὶ συναντώσας τὴν περιγεγραμμένην εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρειαν εἰς Α'', Β'', Γ''.

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΑ'', ΜΒ'', ΜΓ'' τέμνουν τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κατὰ τρία σημεῖα Α', Β', Γ' ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα Α'Β'Γ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν διεύθυνσιν τῶν τριῶν πρώτων παραλλήλων.

Αἱ γωνίαι Α', Β', Γ' εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰ αὐτὰ μέτρα. Πράγματι,

$$2A' = \widehat{M\Gamma} + \widehat{BA''}, \quad 2B' = \widehat{M\Gamma} + \widehat{AB''},$$

$$2\Gamma' = \widehat{B\Gamma''} - \widehat{AM} = \widehat{M\Gamma} + \widehat{AB''}.$$



Σχ. 783.

Αἱ εὐθεῖαι ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ', ἴσον κεκλιμέναι οὖσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἔχουν, κατὰ τὸ γενικευμένον θεώρημα τοῦ R. Simson (§ 1234 ἢ 2464), τοὺς πόδας των ἐπ' εὐθείας.

Τὸ τετράπλευρον ἐξ ἄλλου ΜΓΑ'Β' εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἑπομένως

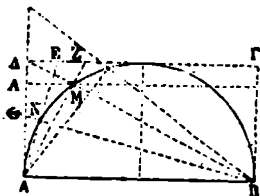
$$A'B'\Gamma = A'M\Gamma = A''M\Gamma = A''A\Gamma\cdot$$

εἶναι δηλ. ἡ εὐθεῖα Α'Β'Γ' παράλληλος πρὸς τὰς Α''Α κλπ.

Περιφέρειαι.— Θέσεις

Θεώρημα 375

1252. **Εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχον βάσιν ΑΒ διπλασίαν τοῦ ὕψους ΒΓ, θεωροῦμεν σημεῖον Ζ τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{4}$. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς σημεῖον Μ, κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς γραφομένης ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου.**



Σχ. 784.

Τὰ τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΑΔ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν ὀρθὴν αὐτῶν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Αἱ γωνίαι, ἑπομένως, ΔΑΖ, ΑΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ ἡ γωνία ΑΜΒ ὀρθή.

Κεῖται, ἄρα, τὸ Μ ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ ἡμιπεριφερείας.

Θεώρημα 375—I

1253. 1) Τὸ σημεῖον Ν ἀνήκει εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἐὰν ΑΘ=2ΕΔ.

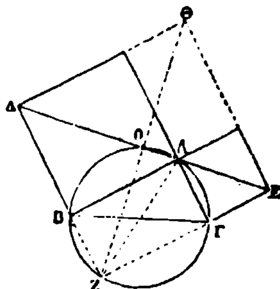
Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΔΑΕ εἶναι τότε ὅμοια, ἀφοῦ ἡ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΔ καὶ ἡ ΑΘ διπλασία τῆς ΔΖ.

2) *Ἐὰν λάβωμεν* $ΑΛ = \frac{4}{5} ΑΔ$, *ἡ παράλληλος* ΛΜ *πρὸς τὴν* ΑΒ *τέμνει τὴν διαγώνιον* ΒΔ *εἰς σημεῖον* Μ *κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας.*

Παρατήρησις. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν κατὰ τὴν ἐν προοπτικῇ θέσιν μιᾶς περιφερείας. (G. Descr. par F. G. M.).

Θεώρημα 375—II

1254. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα. Δείξατε ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ τριγώνου διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ τετραγώνου.



Σχ. 765.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μέσον Ο τῆς εὐθείας ΔΕ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν.

Προεκτείνοντες τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν Δ καὶ Ε τῶν δύο τετραγώνων λαμβάνομεν τετράγωνον ΔΖΕΘ (ἀφοῦ ΔΖ = ΔΒ + ΒΖ = ΒΑ + ΓΕ) τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Ζ κεῖται ἐπ τῆς περιφερείας ΑΒΓ καὶ τῆς ὁποίας περιφερείας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΖ, ὡς ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΖΓ. Ἡ κορυφὴ ἑπομένως τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΖ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒΓ (76).

Θεώρημα 376

1255. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Α) καὶ (Β). Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ἀκτῖνες ΑΓ, ΒΔ αὐτῶν κινοῦνται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ παραμένουν πάντοτε παράλληλοι, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ ἑκάστοτε ἄκρα των διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

Ἔστω ΓΔΝ ἡ διὰ τῶν ἄκρων τῶν ἀκτίνων εὐθεῖα εἰς μίαν τυχοῦσαν θέσιν αὐτῶν. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΝΑΓ, ΝΒΔ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{ΝΑ}{ΝΒ} = \frac{ΑΙ}{ΒΔ},$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΝΑ}{ΝΒ}$ εἶναι σταθερός. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ση-

76. Σημ. μετ. Τὰ τετράγωνα ὑπετέθησαν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενα· ἀνάλογος ὅμως πρότασις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ τετράγωνα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΒΑΓ.

μεῖον Ν, εἰς τὴν περίπτωσιν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων, θὰ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐσωτερικὸν δὲ αὐτοῦ εἰς τὴν περίπτωσιν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων (ὡς αἱ ΑΓ καὶ ΒΕ), ἔπεται ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ὁ λόγος

Σχ. 786.

$$\frac{ΝΑ}{ΝΒ} \text{ ἢ } \frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΑΓ}{ΒΕ},$$

καθορίζει τελείως τὸ σημεῖον Ν ἢ Μ.

Διέρχονται ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΓΔΝ ἢ ΓΜΕ, διὰ σταθερῶν σημείων τῆς διακέντρου ΑΒ.

Σχόλιον. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ. Ἐπειδὴ χωρίζουν αὐτὸ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΝΑ}{ΝΒ}.$$

Θεώρημα 376—I

1256. **Τρεῖς περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο. Δείξατε ὅτι, ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο ἐξ αὐτῶν μετὰ τῶν δύο ἄλλων σημείων ἐπαφῆς, αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουν τὴν τρίτην περιφέρειαν κατὰ τὰ πέρατα διαμέτρου παραλλήλου πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν δύο πρώτων περιφερειῶν.**

Σχ. 787.

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΕΟ, ΟΖ εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον ὁμοιότητος τῶν περιφερειῶν (Μ) καὶ (Ο), τὸ δὲ Γ κέντρον ὁμοιότητος τῶν (Ν) καὶ (Ο). Εἶναι, ἑπομένως, τὰ τμήματα ΕΟ, ΖΟ παράλληλα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΑΜ καὶ ΑΝ, δηλ. πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.

Θεώρημα 376—II

1257. **Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τυχὸν σημεῖον περιφερείας μετὰ τῶν ἄκρων χορδῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ δοθεῖσαν διάμετρον, διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν διάμετρον ταύτην.** (Porismes d'Euclide ὑπὸ Chasles, σ. 95 καὶ 255).

Ἔστω ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς περι-

φερείας· ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς τῶν σημείων Α, Μ, Β, Ν εἶναι ἁρμονική, ἢ ὅτι

$$\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{BN}.$$

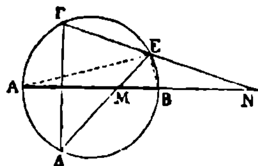
Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΓ καὶ ΕΔ. Αἱ γωνίαι ΑΕΔ, ΑΕΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μέτρον ἡ δὲ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΕΔ.

Ἐπίσης

$$\text{γων. } \Delta EB=\frac{\widehat{\Delta B}}{2}.$$

Ἀλλ' ἡ γωνία ΒΕΝ, παραπληρωματικὴ τῆς ΒΕΓ, ἔχει ὡς μέτρον

$$\frac{\widehat{\Gamma B}}{2}=\frac{\widehat{\Delta B}}{2}\text{ ἄρα γων. } \Delta EB=BEN$$



Σχ. 788.

καὶ ἡ ΕΒ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΕΝ. Κατὰ συνέπειαν

$$\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{BN}.$$

1258. ***Σημείωσις.*** *Τὰ τρία Βιβλία τῶν πορισμάτων τοῦ Εὐκλείδου*, ὑπὸ Chasles. Διὰ νὰ παράσχωμεν μίαν ἰδέαν ἀκριβῆ τῆς ἐννοίας τοῦ *πορίσματος* διὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας, παραθέτομεν κατωτέρω τὸ κείμενον ἑνὸς ἀποσπάσματος ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἔργου (σελ. 54 καὶ 55).

«*Τὰ πορίσματα εἶναι θεωρήματα μὴ πλήρη, ἐκφράζοντα ὡρισμένας σχέσεις μεταξὺ πραγμάτων μεταβαλλομένων κατὰ κοινόν τινα νόμον*. Αἱ σχέσεις αὗται ὑποδεικνύονται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ πορίσματος καὶ θὰ πρέπει νὰ συμπληρωθοῦν διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ, κατὰ μέγεθος ἢ θέσιν, ὡρισμένων πραγμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεως καὶ ἅτινα ὁρίζονται εἰς τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς *πλήρους θεωρήματος*.

«Παράδειγμα πορίσματος: *Εἰς πᾶσαν περιφέρειαν, ἡ γωνία καθ' ἣν φαίνεται ἐκ τοῦ κέντρου τὸ τμῆμα ἑκάστης ἐφαπτομένης, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων, εἶναι σταθερά*, ἢ καί: *εἶναι δεδομένη*, κατὰ τὴν Εὐκλείδειον ἔκφρασιν.

«Παράδειγμα πλήρους θεωρήματος: *Εἰς πᾶσαν περιφέρειαν ἡ γωνία καθ' ἣν φαίνεται ἐκ τοῦ κέντρου τὸ τμῆμα ἑκάστης ἐφαπτομένης, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῶν καταληγουσῶν εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν σταθερῶν ἐφαπτομένων*».

Τὰ πορίσματα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων.

Τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου συνέκειτο ἐκ τριῶν Βιβλίων καὶ περιεῖχε 171 προτάσεις. Ὁ Πάππος ἀνάγει 171 ἐκ τῶν πορισμάτων τοῦ Εὐκλείδου εἰς XXIX *εἴδη*. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν πορισμάτων θέτει κατ' ἀρχὰς XXXVIII λήμματα.

Πολυάριθμοι ἀπόπειραι ἔχουν γίνει διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τοῦ κειμένου τοῦ Εὐκλείδου κατὰ τὰς ὑποδείξεις τοῦ Πάππου.

Τοῦ ἔργου τούτου ἐπελήφθη ὁ ἀστρονόμος Halley, ὁ δὲ Robert Simson ἀπεκατέστησε τὸ κείμενον τριῶν θεμελιωδῶν πορισμάτων. Ὁ Breton de Champ, διακεκριμμένος μηχανικός, ἐδημο-

σίευσε τὸ 1855 καὶ 1858 τὰς *Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide* αὐτοῦ. Ὁ Chasles, τέλος, ἔδωσε τὸ 1858 τὰ *Trois livres des porismes d'Euclide*, ἀποκατεστημένα κατὰ τὰ σχόλια καὶ λήμματα τοῦ Πάππου καὶ σύμφωνα πρὸς τὰς ἀπόψεις τοῦ R. Simson, ἐπὶ τῆς μορφῆς τῶν ἐκφωνήσεων τῶν προτάσεων αὐτῶν.

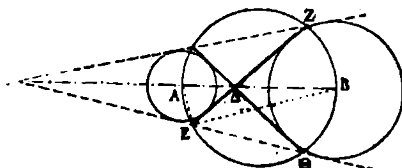
Θὰ πρέπει ἀκόμη νὰ μνημονεύσωμεν τὰς διαμαρτυρίας τοῦ Breton de Champ (Ν. Α., 1867, σ. 522) καὶ νὰ παρατηρήσωμεν, ἀπὸ συμφώνου μετὰ τοῦ Poncelet, ὅτι κάπως πολὺ εὐκόλως ἀποδίδονται εἰς τοὺς ἀρχαίους ὡρισμέναι θεωρίαι ἢ θεωρήματα, ἐκ τῶν ὁποίων μερικαὶ μόνον εἰδικαὶ περιπτώσεις ἦσαν ἴσως γνωσταὶ εἰς αὐτούς. Βλέπε σχετικῶς § 1085, α, Σημείωσιν.

Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν πορισμάτων, βλέπε ἐπίσης καὶ τὴν *Géométrie Grecque* τοῦ P. Tannery, σ. 152 κ. ἑπ. Τὴν ἐνδιαφέρουσαν ταύτην ἱστορικὴν μελέτην ἀναγινώσκει τις μετὰ πολλῆς ὠφελείας.

Θεώρημα 376—III

1259. **Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν διάκεντρον δύο περιφερειῶν, ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων, διέρχεται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο περιφερειῶν** (Ν. Α. 1869, σ. 458).

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή.



Σχ. 789.

Πράγματι, ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΕΓ τῶν ἐκ τοῦ Ε ἐφαπτομένων· ἐπίσης, ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς, παραπληρωματικῆς αὐτῆς, γωνίας ΖΕΘ. Εἶναι, ἐπομένως, ἡ γωνία ΑΕΒ ὀρθὴ κλπ.

1259 α. ***Σημείωσις.*** Ὁ Barisien εἰς τὴν *Mathesis* ἀπέδειξε τὴν ἑπομένην πρότασιν: *Τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος δύο περιφερειῶν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς διακέντρου αὐτῶν, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν εἶναι ἐλάχιστον· τὸ δὲ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος, τὸ σημεῖον τῆς ἰδίας εὐθείας, μὲ διαφορὰν τῶν ἐφαπτομένων ἐλαχίστην.*

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, θεωροῦμεν τὸ μέρος τῆς διακέντρου τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν κείμενον καὶ εἰς τὴν δευτέραν τὸ ἐξωτερικῶς τῶν περιφερειῶν κείμενον.

Θεώρημα 376—IV

1259 β. **Ἐὰν μία διατέμνουσα δύο περιφερειῶν** (Ο), (Ο') **ὁρίζῃ δύο χορδὰς αὐτῶν ΑΒ, Α'Β' ἴσας, αἱ δύο περιφέρειαι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ Α καὶ Β'** (Σχ. 790).

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΑΜΟ = Β'ΜΟ'.

Φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν διατέμνουσαν ΟΔ, Ο'Δ' καὶ ΜΡ.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΔΟ, ΜΡΑ, εὑρίσκομεν :

$$\frac{AO}{AM} = \frac{A\Delta}{MP},$$

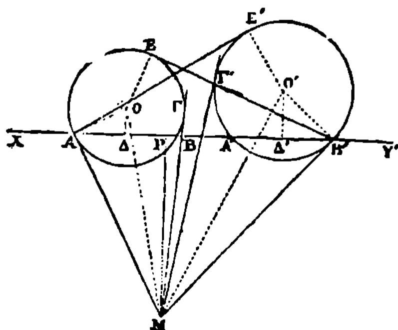
καὶ ἀναλόγως

$$\frac{B'O'}{B'M} = \frac{B'\Delta'}{MP}.$$

Ἀλλ' εἶναι ΑΔ = Β'Δ', ὡς ἡμίση ἴσων χορδῶν· ἄρα

$$\frac{A\Delta}{MP} = \frac{B'\Delta'}{MP},$$

$$\frac{AO}{AM} = \frac{B'O'}{B'M},$$



Σχ. 780.

καὶ τὰ τρίγωνα ΑΜΟ, Β'ΜΟ' εἶναι ὅμοια. Εἶναι ἐπομένως ἡ γωνία ΑΜΟ = Β'ΜΟ'.

1259 γ. Παρατηρήσεις. 1) Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΕ', Β'Ε εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἴσα γινόμενα ΑΒ'. ΑΑ' καὶ Β'Α . Β'Β.

2) Καὶ τὸ ἀντίστροφον τῆς προτάσεως ἀληθεύει: Ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΜΟ, Β'ΜΟ' εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΑ', ΒΒ'.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εὑρίσκεται εἰς τὰ ***Théorèmes et Problèmes*** τοῦ Catalan (6ᵉ éd., σ. 166), ὡς καὶ εἰς τὴν 7ην ἔκδοσιν τοῦ *Traité de Géométrie* τοῦ Rouché (σ. 312)· χρησιμεύει δὲ ὡς λῆμμα διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Προβλήματος τοῦ Malfatti (§ 1546, θ, ι).

Θεώρημα τοῦ D'Alembert 377

1260. **Τρεῖς περιφέρειαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, ὁρίζουν ἓξ κέντρα ὁμοιότητος. Τὰ τρία ἐξωτερικὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας, καθὼς καὶ δύο ἐσωτερικὰ καὶ ἓν ἐξωτερικόν.**

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι πανομοιότυπος πρὸς τὴν ἤδη γενομένην διὰ τρία ὁμοιόθετα πολύγωνα (§§ 1149 καὶ 212).

Αἱ διατέμνουσαι παρέχουν ἐπίσης μίαν ὡραίαν ἀπόδειξιν.

Ἡ χρῆσις, τέλος, βοηθητικῶν στερεῶν ὡδήγησεν τὸν Monge εἰς τὴν ἁπλουστάτην καὶ κομψοτάτην ἀπόδειξιν τῆς § 176.

1260 α. Εἰς τὸ ***Aperçu Historique*** τοῦ Chasles, σ. 293, ἀναφέρεται ὅτι ὁ Fuss ἀποδίδει τὸ Θεώρημα εἰς τὸν d'Alembert. Ἀφ' ἑτέρου, ὁ Carnot εἰς τὸ ἔργον του ***Mémoire sur la relation qui existe entre les distances relatives à sinq points quelconques pris dans l'espace,*** τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖται καὶ ὑπὸ ἑνὸς ***Essai sur la théorie des Transversales,*** τὸ ἀποδίδει εἰς τὸν Monge.

Ἐν πάσει περιπτώσει, ὁ τελευταῖος οὗτος τὸ κατέστησε κοινὸν κτῆμα εἰς τὰ *Éléments de Géométrie descriptive* αὐτοῦ. (Βλ., ***Int. d. Math.,*** 1898, σ. 271, nº 1418).

Θεώρημα 378

1261. Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον. Τὸ δὲ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου εἶναι κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

1η Ἀπόδειξις. (*Μέθοδοι*, § 28).

2α Ἀπόδειξις (σχ. 791). 1) Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων διέρχεται διὰ τῶν σημείων Δ, Θ, Ζ, Ι· τὸ κέντρον της, ἑπομένως, εἶναι τὸ Ν, μέσον τοῦ τμήματος ΟΗ. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ· εἶναι ἄρα:

$$ΝΔ = \frac{1}{2} ΟΑ.$$

Ἐπίσης: Τὰ τρίγωνα ΑΗΟ, ΔΟΝ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν· ἐπειδὴ

$$ΟΔ = \frac{1}{2} ΑΗ, \quad ΟΝ = \frac{1}{2} ΟΗ.$$

Ἄρα:

$$ΝΔ = \frac{1}{2} ΟΑ.$$

2) Τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας, ἀφοῦ

$$\frac{ΗΝ}{ΗΟ} = \frac{1}{2} = \frac{ΝΔ}{ΑΟ}.$$

Ὥστε: *πᾶσα ἡμιευθεῖα διὰ τοῦ σημείου* Η, *περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν* ΑΒΓ, *διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων* ΔΕΖ.

Ἀποδεικνύεται οὕτω ἀπ' εὐθείας ὅτι τὸ μέσον Ι τῆς ΑΗ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων (§ 720), ὡς καὶ ὅτι ΗΘ = ΘΛ (§ 292 γ).

Θεώρημα 378—I

1262. 1) Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἡ ἀπόστασις μιᾶς πλευρᾶς, ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

2) Τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τὸ κέντρον βάρους, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων καὶ τὸ ὀρθόκεντρον ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

1) Τὴν πρότασιν ταύτην ἀπεδείξαμεν ἤδη (§§ 666 καὶ 292 γ)· παραθέτομεν καὶ μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν αὐτῆς:

Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον, Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Euler* (§ 1119), τὰ σημεῖα Η, Μ, Ο κεῖνται ἐπὶ τῆς *εὐθείας τοῦ Euler*. Ἀλλ' εἶναι ΑΜ = 2 ΜΔ, ἄρα καὶ

$$ΑΗ = 2\,ΟΔ.$$

Ἐπίσης: ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΟΝ, ΒΗΟ εὑρίσκομεν ΗΟ = 2 ΝΟ· ἑπομένως:

$$ΒΗ = 2 . ΖΟ.$$

2) Αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους των ἀπὸ τῶν κορυφῶν·

ἄρα $OM = \frac{1}{3} OH$,

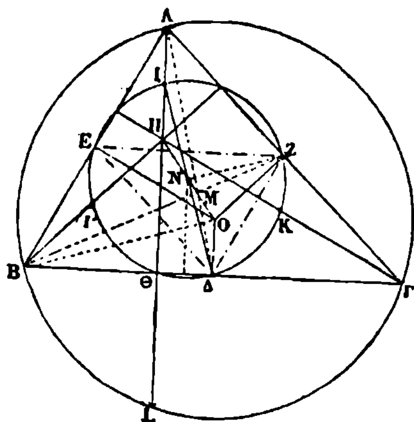
$MN = \frac{1}{6} OH$

ἢ

$MN = \frac{1}{2} OM$.

Ὥστε :

$$\frac{MN}{MO} = \frac{HN}{HO}.$$



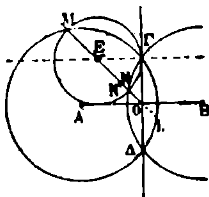
Σχ. 791.

Σημείωσις. 1) Βλ. §§ 734 καὶ 1341 β· ἐπίσης, *Μέθοδοι*, §§ 130, 292 λ.

2) Ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων ἦτο γνωστὴ ἀρχικῶς ὡς περιφέρεια τῶν ἓξ σημείων τοῦ Euler. Σχετικῶς βλέπε μίαν ὡραίαν στοιχειώδη ἐργασίαν τοῦ V. Thébault : *Système de six points concycliques*. (*Bulletin d. math. élém.*, 1910, σ. 25).

Θεώρημα 378—II

1263. Δύο ἴσαι περιφέρειαι τέμνονται κατὰ κοινὴν χορδὴν ΓΔ. Δείξατε ὅτι πᾶσα περιφέρεια, ἐφαπτομένη τῆς κοινῆς χορδῆς εἰς Γ ἢ Δ, τέμνει τὰς περιφερείας εἰς σημεῖα Μ, Ν, ἐπ' εὐθείας εὑρισκόμενα μετὰ τοῦ μέσου Ο τῆς διακέντρου ΑΒ.



Σχ. 792.

Ἄς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ καὶ ἄς καλέσωμεν Ν' τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῆς μετὰ τῆς περιφερείας (Ε) καὶ Ν τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τῆς περιφερείας (Β). Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Ε), θὰ ἔχωμεν

$$OM \cdot ON' = O\Gamma^2.$$

Ἀλλ' εἶναι $OM \cdot O\Lambda = O\Gamma \cdot O\Delta = O\Gamma^2$·

ἄρα: $OM \cdot ON' = OM \cdot O\Lambda = OM \cdot ON$.

Ὅθεν: $N = N'$,

καὶ τὰ σημεῖα Ο, Ν, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Θεώρημα 379

1264. Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις πρὸς δύο περιφερείας εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν περιφερειῶν. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν.

Θεώρημα 380

1265. Ὁ ῥιζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν εἶναι ὁ τόπος [77] τῶν σημείων ἐξ ὧν ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι ἐπὶ τὰς δύο περιφερείας.

1265 α. Σημείωσις. Ὁ ὅρος *ῥιζικὸς ἄξων* προετάθη ὑπὸ τοῦ Gaultier, εἰς ἓν ὑπόμνημα αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἐπαφῶν περιφερειῶν. (*Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e cahier, 1813).

(Κατὰ Poncelet καὶ Chasles : *Traité des propriétés projectives des figures*, τόμ. I, σ. 41 καὶ *Géométrie supérieure*, σ. 501).

Ὁ ῥιζικὸς ἄξων ἐκλήθη καὶ *εὐθεῖα δισομόλογος* (*dishomologue*). (Ritt, *Problèmes de Géométrie*).

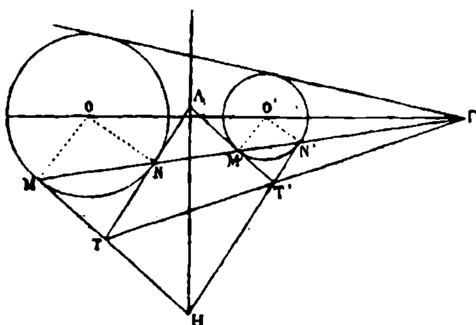
Ὁ Poncelet ἐγενίκευσε τὴν ἔννοιαν τοῦ ῥιζικοῦ ἄξονος, ἐπεκτείνας αὐτὴν διὰ δύο τυχούσας κωνικὰς τομὰς κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀντικατέστησεν τὴν ὀνομασίαν *ῥιζικὸς ἄξων*, ἁρμόζουσαν μόνον διὰ περιφερείας, διὰ τοῦ ὅρου *κοινὴ τέμνουσα*.

Ἡ σπουδὴ τοῦ ζεύγους δύο κωνικῶν τομῶν ὁδηγεῖ εἰς τὴν πρότασιν: *Δύο περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰς τεμνούσας· τὴν μίαν εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν* (ὁ ῥιζικὸς αὐτῶν ἄξων) *καὶ τὴν ἄλλην εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν* (ἢ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα). Ὁ ῥιζικὸς ἄξων τέμνει τὰς δύο περιφερείας εἰς δύο σημεῖα πραγματικὰ ἐὰν τέμνωνται αὗται (ἢ ἐφάπτωνται, ὁπότε συμπίπτουν εἰς ἕν), εἰς φανταστικὰ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

Τὰ *ἐπ' ἄπειρον κυκλικὰ σημεῖα* εἶναι τὰ φανταστικὰ κοινὰ σημεῖα ἑκάστης περιφερείας μετὰ τῆς ἐπ' ἄπειρον κοινῆς τεμνούσης αὐτῶν.

Θεώρημα 381

1266. Ἐὰν διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιότητος δύο περιφερειῶν φέρωμεν εὐθεῖαν, συναντῶσαν αὐτὰς εἰς τέσσαρα σημεῖα, αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ σχηματίζουν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος διέρχεται διὰ τοῦ ἐν λόγῳ κέντρου ὁμοιότητος καὶ ἡ ἄλλη κεῖται ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας. (Chasles, Πορίσματα τοῦ Εὐκλείδου, σ. 315).



Σχ. 793.

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα MTN, M'T'N' εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ αἱ γω-

77. Σημ. μετ. Τὸ ἐκτὸς τῶν περιφερειῶν μέρος αὐτοῦ.

νίαι αὐτῶν εἰς Τ καὶ Τ' εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν εἰς Ο καὶ Ο' (§ 1256).

Τὰ τρίγωνα ΜΗΝ', ΝΛΜ' ἔχουν τὰς ὀξείας αὐτῶν γωνίας ἴσας πρὸς τὰς ὀξείας γωνίας τῶν δύο πρώτων τριγώνων. Εἶναι, ἄρα, ἰσοσκελῆ καὶ ΛΝ = ΛΜ', ΗΜ = ΗΝ'.

Κατὰ συνέπειαν, τὰ σημεῖα Η καὶ Λ ἀνήκουν εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο περιφερειῶν (§ 1265).

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Τ, Τ' εἶναι ὁμόλογα, ἡ συνδέουσα αὐτὰ εὐθεῖα ΤΤ' εἶναι ἄξων ὁμοιότητος καὶ κατ' ἀνάγκην διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ (§ 1145).

Θεώρημα 382

1267. **Ὁ ῥιζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν αὐτὰς ὀρθογωνίως.**

Θεώρημα τοῦ Poncelet 383

1268. **Αἱ περιφέρειαι, αἱ τέμνουσαι ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας ἐξωτερικὰς ἀλλήλων, διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων.** Τὰ σημεῖα ταῦτα καλοῦνται **ὁριακὰ σημεῖα τοῦ Poncelet**.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 231).

Ἡ ἐν τῇ ἀνωτέρω παραπομπῇ ἀπόδειξις προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἐννοιῶν τῶν σχετικῶν πρὸς τὸν ριζικὸν ἄξονα· δίδομεν διὰ τοῦτο μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν.

Σχ. 701

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι δυο περιφέρειαι (Α) καὶ (Γ) τέμνονται ὀρθογωνίως ἐὰν αἱ ἀκτῖνες ΑΕ, ΓΕ εἰς ἓν τῶν κοινῶν των σημείων εἶναι κάθετοι μεταξύ των· ἑκάστη δὲ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἑτέρας περιφερείας.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια (Γ) τέμνει ὀρθογωνίως τὰς (Α) καὶ (Β), αἱ ἐφαπτόμεναι ΓΕ, ΓΖ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἔστωσαν Ι, Κ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς διακέντρου ΑΒ καὶ τῆς (Γ)· ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ θέσις τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος ΓΕ. Εἶναι φανερὸν ὅτι

$$ΛΙ = ΛΚ$$

καὶ $$AI \,.\, AK = \rho^2$$

ἢ $$(AΛ - ΛI)(AΛ + ΛI) = \rho^2.$$

Ἐπομένως $AΛ^2 - ΛI^2 = \rho^2$, σταθερὰ ποσότης.

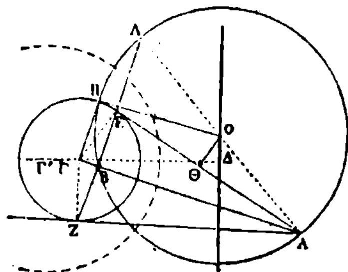
Κατ' ἀναλογίαν, εὑρίσκομεν $BΛ^2 - ΛK^2 = \rho'^2$.

Εἶναι δηλ. ἡ θέσις τῶν σημείων I καὶ K ἐπὶ τῆς AB ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος ΓE.

Θεώρημα 383—I

1269. Ἐὰν ἐκ σημείου τυχόντος τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς συστήματος περιφερειῶν, ἐχουσῶν ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα, φέρωμεν ζεῦγος ἐφαπτομένων ἐπὶ ἑκάστην περιφέρειαν, τὸ μέσον ἑκάστης χορδῆς ἐπαφῶν εὑρίσκεται ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας, τεμνούσης ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας τοῦ συστήματος. (Poncelet, Applications d'Analyse et de Géométrie, τόμ. II, σ. 397).

Ἔστω (Γ) μία τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐχουσῶν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα ΟΔ, A τὸ δοθὲν σημεῖον, AE καὶ AZ αἱ ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι ἐπὶ τὴν (Γ), B τὸ μέσον τῆς χορδῆς EZ.



Σχ. 796.

Πᾶσα περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας (Γ) ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΟΔ. Ἂς θεωρήσωμεν λοιπὸν μίαν περιφέρειαν (O), διερχομένην διὰ τῶν A, B καὶ ἔχουσαν τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς ΟΔ· ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια (O) — ἡ ὁποία, προφανῶς, εἶναι τελείως ὡρισμένη — τέμνει ὀρθογωνίως τὴν περιφέρειαν Γ, δηλ. ὅτι ἡ γωνία ΓΗΟ τοῦ σχήματος εἶναι ὀρθή.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓEA εὑρίσκομεν

$$ΓE^2 = ΓB \,.\, ΓA$$

ἤ, ἀφοῦ $$ΓE = ΓH,$$

$$ΓH^2 = ΓB \,.\, ΓA.$$

Ἡ σχέσις αὕτη δεικνύει ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΗ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O), δηλ. ὅτι ἡ γωνία ΓΗΟ εἶναι ὀρθὴ γωνία καὶ ἡ (O) ὀρθογώνιος πρὸς τὴν (Γ).

Θεώρημα 383—II

1270. **Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.**

Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ABE εἶναι ὀρθή, ἡ πλευρὰ BE αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Λ, ἑτέρου ἄκρου τῆς διὰ τοῦ A διαμέτρου τῆς περιφερείας (O).

Θεώρημα 384

1271. Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι (M), (N), (P) τέμνωνται, αἱ τρεῖς κοιναὶ χορδαὶ αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Monge).

1η Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ· φέρομεν τὴν ΕΟ καὶ ὀνομάζομεν Ζ καὶ Θ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τῶν περιφερειῶν (N) καὶ (P).

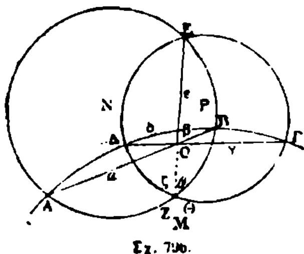
Ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ καὶ θ τὰ ἐπὶ τῶν χορδῶν τμήματα. Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας:

Εἰς τὴν περιφέρειαν	(M)	$\alpha\beta = \gamma\delta$,	(1)
»	(N)	$\alpha\beta = \varepsilon\zeta$,	(2)
»	(P)	$\gamma\delta = \varepsilon\theta$.	(3)

Ἐπομένως $\zeta = \theta$ ἢ $Z \equiv \Theta$,

δηλ. ἡ εὐθεῖα ΕΟ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν (N) καὶ (P) περιφερειῶν.

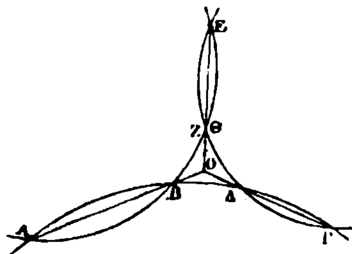
2α Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ *βοηθητικὰ στερεὰ* (§ 16 κ. ἑπμ.). Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τρεῖς περιφέρειαι εἶναι μέγιστοι κύκλοι τριῶν σφαιρῶν, ἐχουσῶν κέντρα τὰ σημεῖα M, N, P. Αἱ σφαῖραι (M) καὶ (N) τέμνονται κατὰ μικρὸν κύκλον, προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MNP κατὰ τὴν ΑΒ, αἱ δὲ (M) καὶ (P) κατὰ μικρὸν κύκλον, προβαλλόμενον κατὰ τὴν ΓΔ.



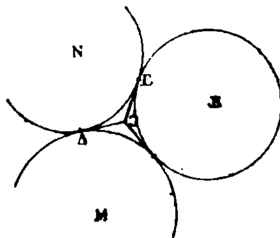
Σχ. 796.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον τῶν μικρῶν τούτων κύκλων, τὸ προβαλλόμενον εἰς Ο, εἶναι κοινὸν καὶ τῶν τριῶν σφαιρῶν, ἕπεται ὅτι θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν σφαιρῶν (N) καὶ (P). Κατὰ συνέπειαν, ἡ χορδὴ ΕΖ, καθ' ἣν θὰ προβάλλεται ἡ τομὴ αὕτη, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

1271 α. Παρατηρήσεις. 1) Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν χορδῶν



Σχ. 797.



Σχ. 798.

εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῶν χορδῶν. Ἡ πρώτη ἀπόδειξις ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (Σχ. 797).

2) Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν μετατοπιζομένας τὰς περιφερείας, ὥστε νὰ καταστοῦν αὗται ἐφαπτόμεναι· μολονότι τὰ μήκη τῶν κοινῶν χορδῶν μηδενίζονται τότε, αἱ ὁριακαὶ διευθύνσεις των εἶναι ὡρισμέναι, ὡς διευθύνσεις τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἑπομένως :

Αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τριῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Σημείωσις. Τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τοῦ ἑπομένου τῆς § 1272.

Τὸ θεώρημα (§ 1271), διὰ πραγματικὰς κοινὰς τεμνούσας, ἀνήκει εἰς τὸν Monge. (Κατὰ τὸν Poncelet, *Traité*, κλπ., τ. I, σ. 40).

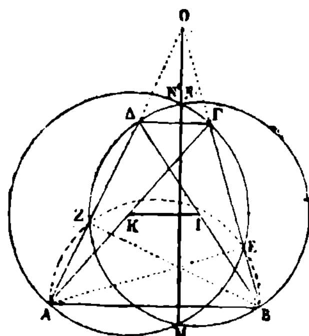
Θεώρημα 384—I

1272. 1) Οἱ ῥιζικοὶ ἄξονες τριῶν περιφερειῶν, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Τὸ σημεῖον τοῦτο — ῥιζικὸν κέντρον τῶν τριῶν περιφερειῶν — εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας τεμνούσης ὀρθογωνίως τὰς τρεῖς δοθείσας.

Θεώρημα 385

1273. Ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐχουσῶν ὡς διαμέτρους τὰς διαγωνίους τραπεζίου, διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.



Σχ. 799.

Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΒΔ διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς Z τῆς ἐκ τοῦ B καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ, ἡ δὲ μὲ διάμετρον ΑΓ διὰ τοῦ ποδὸς E τῆς καθέτου ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν ΓΒ. Τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα, E καὶ Z, ἀνήκουν προφανῶς εἰς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον AB.

Ἔστω N ἡ τομὴ τῆς OM καὶ τῆς περιφερείας BMN καὶ N′ ἡ τομὴ τῆς OM καὶ τῆς περιφερείας ΑΜΓ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $N \equiv N'$.

Ἔχομεν

$$OM \cdot ON = O\Delta \cdot OZ, \quad (1)$$

$$OM \cdot ON' = O\Gamma \cdot OE. \quad (2)$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ γινόμενα $O\Delta \cdot OZ$, $O\Gamma \cdot OE$ εἶναι ἴσα.
Ἐκ τῆς ἡμιπεριφερείας AZEB λαμβάνομεν

$$OB \cdot OE = OA \cdot OZ, \quad (3)$$

ἐκ δὲ τῶν παραλλήλων AB, ΓΔ,

$$\frac{OB}{O\Gamma} = \frac{OA}{O\Delta} \quad ἢ \quad OB \cdot O\Delta = OA \cdot O\Gamma. \quad (4)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4), εὑρίσκομεν

$$\frac{OE}{O\Delta} = \frac{OZ}{O\Gamma} \quad ἢ \quad OE \cdot O\Gamma = O\Delta \cdot OZ.$$

Ἐκ συγκρίσεως τῆς σχέσεως ταύτης πρὸς τὰς (1) καὶ (2), πορι-ζόμεθα τὴν ἰσότητα

$$OM.ON = OM.ON',$$

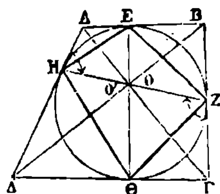
δηλ. τὴν

$$ON = ON'.$$

Θεώρημα τοῦ Νεύτωνος 386

1274. Αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου περιγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν καὶ αἱ χορδαὶ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἢ: Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου καὶ ἐκεῖναι τοῦ τετραπλεύρου τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς κορυφάς του, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 800.

Ἀπόδειξις τοῦ L. Anne. Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ δύο παραπληρωματικάς, αἱ πλευραί, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν τῶν κειμένων ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν (§ 150).

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΓ καὶ ΗΖ.

Τὰ τρίγωνα ΑΟΗ, ΓΖΟ ἔχουν ἴσας τὰς γωνίας εἰς Ο καὶ τὰς εἰς Ζ καὶ Η παραπληρωματικάς, ὡς σχηματιζομένας ὑπὸ χορδῆς καὶ τῶν (ἀντιθέτων φορῶν) ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἐπομένως

$$\frac{AH}{\Gamma Z} = \frac{AO}{\Gamma O}.$$

Ἔστω Ο' ἡ τομὴ τῶν ΑΓ καὶ ΕΘ· θὰ ἔχωμεν ὁμοίως

$$\frac{AE}{\Gamma\Theta} = \frac{AO'}{\Gamma O'}.$$

Ἀλλ' εἶναι ΑΗ = ΑΕ, ΓΖ = ΓΘ· ἄρα:

$$\frac{AO}{\Gamma O} = \frac{AO'}{\Gamma O'},$$

καὶ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο' συμπίπτουν.

Θεώρημα 386—I

1275. Ἔστωσαν δύο τετράπλευρα, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου ὡς σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του.

Δείξατε ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑκάστου τετραπλεύρου τέμνονται, ἀνὰ δύο κατὰ τέσσαρα σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν δύο τετραπλεύρων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

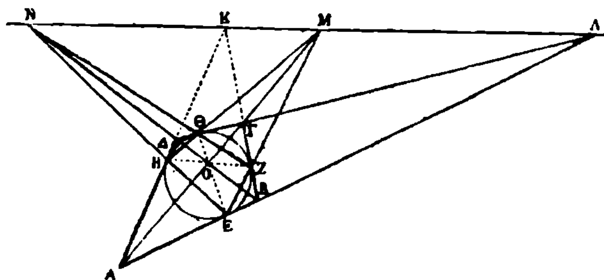
Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τὰ τετράπλευρα.

1) Ἂν Ο εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν χορδῶν ἐπαφῆς ΕΘ καὶ ΗΖ, ἡ τρίτη διαγώνιος ΜΝ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΕΖΗΘΜΝ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Ο (G. n° 798, 3°).

Τὸ σημεῖον Λ εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΕΘ καὶ τὸ Κ ὁ πόλος

τῆς ΗΖ. Εἶναι, ἑπομένως, ἡ ΛΚ ἡ πολικὴ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν εὐθειῶν ΕΘ καὶ ΗΖ καὶ συμπίπτει πρὸς τὴν ΜΝ, τὴν ἀποδειχθεῖσαν προηγουμένως ὡς πολικὴν τοῦ Ο.

Κεῖνται κατ' ἀκολουθίαν τὰ τέσσαρα σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ν ἐπ' εὐθείας.



Σχ 801

2) Τὸ σημεῖον Β εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΕΖΜ, τὸ Ο ὁ πόλος τῆς ΜΚ καὶ τὸ Δ ὁ πόλος τῆς ΗΘΜ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΕ, ΜΗ, ΜΚ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ, οἱ πόλοι αὐτῶν Β, Ο, Δ, ἀντιστοίχως, εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (G., n° 804, 2) καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΟΔ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Μ.

Ἀναλόγως, ἡ εὐθεῖα ΑΓ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.

3) Αἱ διαγώνιοι τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου διέρχονται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΗΘ, ΑΓ, ΕΘ εἶναι αἱ πολικαὶ τῶν τριῶν σημείων Δ, Ν, Β, κειμένων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. (G. n° 804, 1).

1275 α. ***Σημείωσις.*** Τὸ *θεώρημα τοῦ Νεύτωνος* ἀληθεύει καὶ διὰ τυχοῦσαν κωνικὴν τομήν.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως (§ 1274) εἶναι τοῦ Léon Anne (N.A., 1843, σ. 186· 1844, σ. σ. 28 καὶ 465).

Οἱ ὅροι *πόλος καὶ πολικὴ* εὐθεῖα ἐχρησιμοποιήθησαν τὸ 1809 ὑπὸ τοῦ Servois. (Βλ. G. de Longchamps, *Géométrie de la règle et de l'équerre*, 1890).

Θεώρημα 387

1276. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν τετραπλεύρου, τέμνονται κατὰ σημεῖον κείμενον ἐπ' εὐθείας γραμμῆς μετὰ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου. (N. A.).

Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι τὸ σχῆμα ΘΙΗΙ' εἶναι ρόμβος (§ 675). Θὰ ἀποδείξωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ρόμβου τούτου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους

Ἐκ τῆς διχοτόμου ΖΙ' λαμβάνομεν

$$\frac{AI'}{BI'} = \frac{AZ}{BZ},$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΓ, ΒΖΔ,

$$\frac{ΑΖ}{ΒΖ}=\frac{ΑΓ}{ΒΔ}\,.$$

ἄρα

$$\frac{ΑΙ'}{ΒΙ'}=\frac{ΑΓ}{ΒΔ}\,. \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἡ διχοτόμος ΕΗ καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΓ, ΔΕΒ δίδουν τὰς σχέσεις

$$\frac{ΑΗ}{ΔΗ}=\frac{ΑΕ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΒΔ}\,. \qquad (2)$$

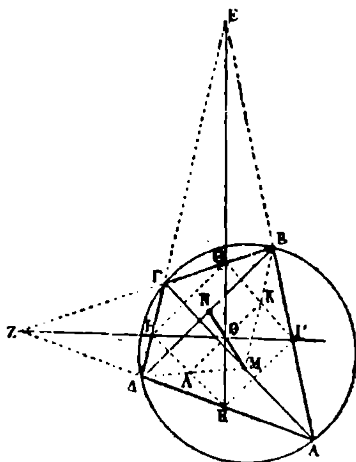
Ἐκ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\frac{ΑΙ'}{ΒΙ'}=\frac{ΑΗ}{ΔΗ}\,,$$

δηλ. ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΙ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διαγώνιον ΔΒ καί, κατ' ἀναλογίαν, ὅτι ἡ ΗΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἔστωσαν τώρα Μ, Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ Κ, Λ αἱ τομαὶ τῶν ΜΒ, ΜΔ μετὰ τῶν ΘΙ' καὶ ΙΗ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ ἡ ΒΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ διαιρῇ τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα Ι'Θ τῶν ΒΓ καὶ ΒΑ εἰς δύο ἴσα τμήματα καὶ τὸ σημεῖον Κ θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΘΙ'.



Σχ. 802.

Ἀναλόγως, τὸ Λ θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΙΗ.

Ἡ εὐθεῖα ΛΚ, ὡς ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ρόμβου, διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων του καὶ εἶναι ἐπίσης παράλληλος πρὸς τὰς ΙΘ καὶ ΒΔ. Τὸ μέσον της, ἑπομένως, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΜΝ τοῦ τριγώνου ΒΜΔ.

Θεώρημα 387—Ι

1276 α. **Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἀνὰ δύο τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου τούτου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Πράγματι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΜΝ, τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων (§ 548)· ἑπομένως, αἱ διχοτόμοι καὶ αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, μέσου τῆς ΜΝ.

Θεώρημα 387—ΙΙ

1276 β. **Ἔστω ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ θεωρήσωμεν τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν κορυφῶν του, ἀνὰ τρεῖς λαμ-**

βανομένων. Δι' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν (ὡς λ. χ. διὰ τὸ ΑΒΓ), φέρομεν καθέτους ἐκ τῆς τετάρτης κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου (ἐκ τῆς Δ) ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Δείξατε ὅτι αἱ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λαμβανόμεναι τέσσαρες εὐθεῖαι τοῦ Simson διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν τῶν τεσσάρων περιφερειῶν τῶν ἐννέα σημείων τῶν θεωρηθέντων τριγώνων. (Lemoine, N. A., 1869, σ. 174 καὶ 317).

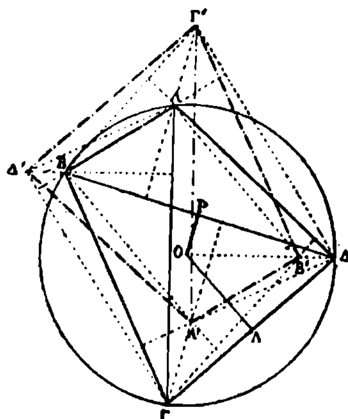
(Βλ. N. A., 1871, σ. 206 καὶ Millet, *Principales méthodes de la Géométrie moderne*, σ. 138 καὶ 139).

Θεώρημα 388

1277. Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων τῆς προηγουμένης προτάσεως εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἴσου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΑΒΓΔ.

Ἔστωσαν Α', Β', Γ', Δ' τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Θὰ πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

Α'Β'Γ'Δ' = ΑΒΓΔ.



Σχ. 800.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις ΟΡ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΔ τοῦ τριγώνου ΒΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως ΑΓ', τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου (§ 1261). Ὥστε:

ΑΓ' = 2.ΡΟ = ΓΑ'.

Τὸ τετράπλευρον ΑΓΑ'Γ', τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα

ΑΓ = Α'Γ'

καὶ κατ' ἀναλογίαν

ΒΔ = Β'Δ'.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, ἡ ΒΑ', κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς 2.ΟΛ, εἰς δὲ τὸ ΓΑΔ, ἡ ΑΒ' ἴση πάλιν πρὸς 2.ΟΛ. Εἶναι ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΒΑ'Β' παραλληλόγραμμον καὶ αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαι.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ παραλληλία καὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τῶν δύο τετραπλεύρων ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ'. Κατὰ συνέπειαν, εἶναι τὰ σχήματα ταῦτα ἴσα.

Θεώρημα 388—I

1277 α. Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τῶν ἐννέα σημείων τῶν τεσσάρων τριγώνων, τῶν ἀποτελουμένων ἐκ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ, εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ὁμοίου πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΟΑ', τῆς συνδεού-

σης τὸ ὀρθόκεντρον Α΄ τοῦ τριγώνου μετὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας (§ 28). Ὁμοίως, τὸ κέντρον τῆς δευτέρας περιφερείας εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΒ΄ κλπ. (Σχ. 803). Τὰ κέντρα, ἑπομένως, Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄, Δ΄΄ σχηματίζουν τετράπλευρον Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄ ὁμοιόθετον τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ ὅμοιον ἄρα τοῦ ἴσου πρὸς αὐτὸ ΑΒΓΔ. Θὰ ἔχωμεν δέ: $Α''Β'' = \frac{1}{2}(Α'Β' + ΑΒ)$.

Θεώρημα 388—II

1277 β. Θεωρήσωμεν τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΔ, ΒΑΓ, ΔΑΓ.

1) Αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson τῶν τεσσάρων τούτων τριγώνων, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰς τετάρτας κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου, καὶ αἱ περιφέρειαι τοῦ Euler αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Lemoine, 1869).

2) Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τετραπλεύρου μετὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν ἄλλων κορυφῶν, διέρχονται ἐπίσης διὰ τοῦ ἰδίου σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἑνουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου (τῶν διαμέσων αὐτοῦ). (Mathot, *Mathesis*, 1901, σ. 25, n° 2).

3) Εἴκοσι ἑπτά, λίαν ἀξιοσημείωτοι, εὐθεῖαι εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, (Deteuf, N. A., 1908, σ. 442).

1277 γ. Σημείωσις. 1) Τὸ τόσον ἐνδιαφέρον αὐτὸ σημεῖον ἐσημειώθη καὶ καθωρίσθη ὑπὸ τοῦ J. Mathot (*Mathesis*, 1901, σ. 25), εἶναι δὲ τὸ σημεῖον Ν τοῦ σχήματος 401 τῆς προτάσεως τῆς § 676.

2) Ὁ Brocard εἰς τὰ Ν. Α., 1909, σ. 136, ἀπέδειξε ὅτι τὸ ἀρχικὸν θεώρημα ἀνήκει εἰς τὸν E. Lemoine (N. A., 1869, σ. 97, ζτμ. 908)· λύσεις αὐτοῦ ἐδόθησαν εἰς τὸν αὐτὸν τόμον, σ. 174, ὑπὸ τῶν Figa Bartolomeo καὶ Kiepert, ὡς καὶ ὑπὸ τοῦ Morel εἰς σελ. 317.

Σχετικὸν πρὸς τὸ θέμα αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ ζήτημα 279, τεθὲν ὑπὸ τοῦ Franel εἰς τὸ *Int. d. math.*, ὡς καὶ ἡ ἀπάντησις εἰς αὐτὸ τοῦ Lemoine (1894, σ.σ. 151 καὶ 223). Εἰς τὸ ἴδιον περιοδικὸν ἀναφέρεται καὶ σχετικὴ ἐργασία τοῦ S. Kantor.

Θὰ ἦτο προτιμότερον τὸ σημεῖον αὐτὸ Ν νὰ ὀνομάζεται *σημεῖον τοῦ Mathot*. Ἐπειδὴ τὸ *ἁρμονικὸν τετράπλευρον* ἔχει ἤδη τὸ *σημεῖον τοῦ Lemoine* αὐτοῦ.

– 3) Θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναφέρῃ τις πολυαρίθμους ἰδιότητας τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου. Ἰδοὺ μερικαὶ ὑποδείξεις: Ν. Α., 1901, σ. 374 ὑπὸ E. Legrand· 1904, σ. 400, ὑπὸ Lemoyne· 1908, σ. 442, ὑπὸ A. Deteuf. *Mathesis*, 1904, σ. 77, ζτμ. 1442· σ. 79, n° 1141.

Εἰς τὸ περιοδικὸν τοῦ G. de Longchamps εὑρίσκονται πολυάριθμοι τύποι σχετικοὶ πρὸς τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον (*J. M. E.*, 1897, σ. 9, 32, 53, 78, 111, 134, 151, 174. Lecocq). Εἰς τὸν ἴδιον τόμον ὑπάρχουν καὶ ἄρθρα πολὺ ἐνδιαφέροντα τοῦ A. Aubry ἐπὶ τῆς *Géométrie de la Mesure*.

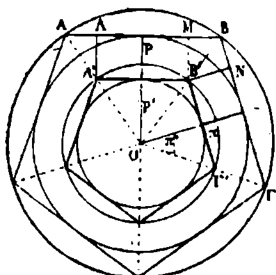
Θεώρημα 388—III

1277 δ. Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον ὡς κορυφὰς τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων ΑΒΓ κλπ. ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, εἶναι ὁμοιόθετον πρὸς αὐτό. (J. d. Mathématiques τοῦ Vuibert, 1905-1906, σ. 44, n° 6079).

Θεώρημα 389

1278. Ἐὰν δύο πολύγωνα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε: 1) εἶναι ὅμοια, 2) αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ 3) αἱ ἀποστάσεις τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἀπ' ἀλλήλων εἶναι ἴσαι, ταῦτα εἶναι περιγράψιμα εἰς περιφερείας (Bordoni.— N. A., 1860, σ. 306).

Τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα. Ἔστω O τὸ κέντρον ὁμοιότητος ἢ ὁμοιοθεσίας αὐτῶν καὶ P, P' καὶ π, π' αἱ ἀποστάσεις τοῦ O ἀπὸ δύο ζευγῶν διαδοχικῶν ὁμολόγων πλευρῶν AB, A'B' καὶ BΓ, B'Γ'.



Σχ. 804.

Ἐπειδὴ αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ὁμόλογοι εὐθεῖαι, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{P}{P'} = \frac{\pi}{\pi'}, \quad \frac{P - P'}{P'} = \frac{\pi - \pi'}{\pi'}.$$

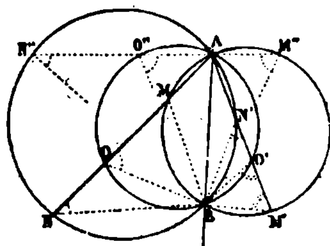
Ἀλλ' αἱ διαφοραὶ $P - P'$, $\pi - \pi'$ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα $P' = \pi'$, $P = \pi$ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων ἐφάπτονται περιφερειῶν ἐχουσῶν κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον O.

Παρατηρήσεις. 1) Τὰ πολύγωνα θὰ εἶναι ἐγγράψιμα ἐὰν AB=BΓ, κλπ.

2) Ἡ ἀνωτέρω πρότασις διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: Δύο πολύγωνα ὅμοια καὶ τῶν ὁποίων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις μεταξύ των, εἶναι περιγράψιμα εἰς ὁμοκέντρους περιφερείας.

Θεώρημα 390

1279. Ἐὰν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουν κοινὴν χορδὴν AB, ἐπὶ πάσης τεμνούσης αὐτῶν AMON, ἀγομένης δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς καὶ τεμνούσης τὰς περιφερείας εἰς M, O, N, ὁρίζονται ἐπ' αὐτῆς δύο τμήματα OM, ON ἔχοντα λόγον σταθερόν.



Σχ. 805.

Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ σχῆμα MONB μένει ὅμοιον ἑαυτῷ κατὰ τὴν μεταβολὴν τῆς διὰ τοῦ A τεμνούσης.

Αἱ γωνίαι εἰς τὰ M, O, N διατηροῦν σταθερὰ μεγέθη, ἐπειδὴ αἱ $\widehat{O}$ καὶ $\widehat{N}$ βαίνουν ἐπὶ σταθερῶν τόξων καὶ ἡ $\widehat{M}$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπίσης ἐπὶ σταθεροῦ τόξου βαινούσης $\widehat{AMB}$. Εἶναι ἐπομένως ὁ λόγος $\frac{OM}{ON}$ σταθερός.

1279 α. Παρατηρήσεις. 1) Καὶ οἱ λόγοι $\frac{BM}{BN}$, $\frac{BM}{BO}$, κλπ. εἶναι ἐπίσης σταθεροί.